

ISSN: 2343 - 6360 / Depósito legal: ppi 201402ZU4464

No. 11 Julio – Diciembre 2016

Revista Tecnocientífica URU



FONDO EDITORIAL BIBLIOTECA

Universidad **R**afael **U**rdaneta

Revista Tecnocientífica URU

ISSN: 2343 - 6360 / Depósito legal: ppi 201402ZU4464

2015© Fondo Editorial Biblioteca Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
Maracaibo, Venezuela

Coordinación editorial: Lcda. Hosglas Sanchez
Portada: Lcda. Luz Elena Hernández
Diseño y maquetación: Thajía Di Gaetano

SE ACEPTAN CANJES

Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta revista en cualquier forma, sin la autorización de los editores.



Universidad Rafael Urdaneta

Revista Tecnocientífica URU

ISSN: 2343 - 6360 / Depósito legal: ppi 201402ZU4464

Comité Editorial

Profesor Jubert Pérez
Profesor Sergio de Pool
Profesos Edixon Gutiérrez
Profesora Jhanna Brieva

Profesor Luis Rojas
Profesora Russet Riquelme
Profesor Cezar García
Profesora Jenny Márquez

Profesor Alfredo Villalobos
Editor – Jefe

Br. María Daniela Uzcátegui
Asistente Editorial

Comité de Asesores

MSc. Oscar Urdaneta (Venezuela)
Dr. Shyam Kalla (India)
Dr. Cezar García (Venezuela)
Dr. José Sarabia (Venezuela)
Dr. José Rincón (Venezuela)
MSc. Zulay Másrmol (Venezuela)
Dra. Cateryna Aiello (Venezuela)
Dra. Elba Michelena (Panamá)
Dr. Rafael Aracil (España)
MSc. Salvador Conde (Venezuela)
Dr. Ever Morales (Ecuador)
Dra. Nola Fernández (Venezuela)
Dr. Helí Lugo (Venezuela)
Dr. Ras Patnaik (Estados Unidos)
Dr. Gerardo Aldana (Venezuela)
Dra. Susana Salinas (Estados Unidos)
MSc. Lenin Herrera (Venezuela)
Dra. Laugeny Díaz (Venezuela)

Dra. Anali Machado (Canadá)
MSc. Ramón Cárdenas (Venezuela)
Dr. Maulio Rodríguez (Venezuela)
Dr. Katsuyuki Nishimoto (Japón)
Dr. Jorge Sánchez (Venezuela)
Dra. Yaxcelys Caldera (Venezuela)
Dra. Oladis de Rincón (Venezuela)
Dr. Nelson Márquez (Venezuela)
Dr. Ramón Cova (Canadá)
Dr. Mourad E.H. Ismail (Estados Unidos)
Dra. Marinela Colina (Venezuela)
Dr. Freddy Isambert (Venezuela)
Dr. Miguel Sánchez (Venezuela)
Dr. Jorge Barrientos (Venezuela)
Dr. Ernesto Cornieles (Venezuela)
MSc. Augusto Galo (Venezuela)
MSc. Nerio Villalobos (Venezuela)

Revista Tecnocientífica URU es un instrumento de divulgación científica adscrito a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Rafael Urdaneta, Maracaibo, Venezuela. Es una revista arbitrada con periodicidad semestral, contentiva de artículos científicos originales no publicados en las áreas de Ingeniería y Arquitectura y otras disciplinas directamente relacionadas con éstas, de autoría individual o colectiva, que cumplan con las normas de publicación.

La correspondencia debe ser enviada a: Editor Jefe, ***Revista Tecnocientífica URU***.

Dirección: Universidad Rafael Urdaneta, Av. 2 c/Calle 86, entrada Sur del Parque Vereda del Lago, Maracaibo, Venezuela.
Teléf. (58) (261) - 2000887, Fax (58)(261) 2000868. Correo electrónico: revistatecnocientificauru@gmail.com

La Revista Tenocientífica URU está indizada en el Índice y Biblioteca Electrónica de Revistas Venezolanas de Ciencia y Tecnología REVENCYT (Código RVR-070).

Universidad Rafael Urdaneta

Dr. Jesús Esparza Bracho, Rector
Ing. Maulio Rodríguez, Vicerrector Académico
Ing. Salvador Conde, Secretario

Ing. Oscar Urdaneta
Decano de la Facultad de Ingeniería

Ing. Rómulo Rincón
Decano (E) de la Facultad de Ciencias Agropecuarias

Ing. Jubert Pérez Zabala
Director de la Escuela de Ingeniería en Computación

Ing. Nancy Urdaneta
Directora de la Escuela de Ingeniería Civil

Ing. Arnaldo Largo
Director de la Escuela de Ingeniería Eléctrica

Ing. Nelson Molero
Director de la Escuela de Ingeniería Química

Ing. Ana Irene Rivas
Directora de la Escuela de Ingeniería Industrial

Ing. Carlos Belinskif
Director de la Escuela de Ingeniería en Telecomunicaciones

Arq. Carlos Aguilar
Director de la Escuela de Arquitectura

Contenido

Presentación Presentation	9
Implementación de un plan de mantenimiento predictivo basado en el análisis de velocidades centrifugas de compresores. Implementation of predictive maintenance plan based on analysis of speed centrifugal compressor. <i>Kenneth Rosillon y Oscar Aguillar.</i>	11
Accidente: Fenómeno Estocástico. Accident: Stochastic Phenomena. <i>José Vicente Ferrer y Naudy Leal.</i>	29
Categorización de usuarios de Twitter. Categorizing Twitter users. <i>Fracisco Luengo, Carla Morillo y Yaskelly Yedra.</i>	35
Uso del Wxmaxima en la enseñanza de la ecuación integral de Fredholm de segunda especie. Use of Wxmaxima on teaching the Fredholm integral equation of second order. <i>Jhonny Araque, Robert Quintero y Oscar León.</i>	45
Modelo diferencial de transferencia de masa para el análisis de la lixiviación ácida del oil fly ash. Differential mass transfer model for the analysis of the acid leaching of oil fly ash. <i>Juan Hernández, José González, Gabriela Carruyo y Cezar García.</i>	55
Integrales que involucran funciones de Bessel de tres variables y dos parámetros. Integrals involving Bessel functions of three variables and two parameters. <i>Leda Galué.</i>	67
Índice acumulado	81
Normas para la presentación de artículos	91
Guides for submitting articles.	95

Presentación

La Nanotecnología como Área de Investigación

La Nanotecnología se define como un área de investigación de la Física que estudia, diseña y fabrica materiales y sistemas a escala microscópica. La paternidad del término nanotecnología se le atribuyen a Norio Taniguchi de Japón y a Eric Drexler de USA. Aunque al respecto, se toma como referencia el Congreso de la Sociedad Americana de Física del año 1959, donde el investigador Richard Feynman en su discurso titulado “There’s plenty of room at bottom”, describe un proceso para la mayor utilización del comportamiento de la dinámica de las partículas – átomos y moléculas, mediante instrumentos de gran precisión, pudiendo diseñar y construir sistemas en escala nano.

El estudio de nanoestructuras de elementos y de la mezcla de elementos han acelerado la aplicación de nuevos materiales que mejoran el nivel de vida del hombre actual. De repente, la investigación de las “cosas pequeñas” se aceleró en los diferentes centros de investigaciones del mundo. Actualmente, los países desarrollados destinan inmensos recursos financieros a la exploración de la nanoestructuras de materiales, tales que funcionen a mayor velocidad y a menor consumo de energía.

Desde hace varios años, los investigadores han enfocado su atención en los llamados Nanotubos de Carbono, especialmente en el grafeno. A partir del grafeno se pueden colocar láminas tras láminas y así construir los Nanotubos. Una lámina de grafeno es lo más delgado que se consigue en la naturaleza y es cien veces más fuerte que el acero, conduce la electricidad mejor que el cobre e irradia menor energía calórica. En la medicina se estudian aplicaciones de nuevos materiales para la elaboración de prótesis e implantes ortopédicos a partir de nanoaleaciones resistentes y no-radioactivas.

La Nanotecnología ha logrado acelerar los tiempos de los eventos que rigen la vida del hombre. Un minuto en la antigüedad es igual a un minuto actual, pero, hoy el hombre realiza más cosas en un minuto que las que podía realizar el hombre en tiempos remotos; y hasta podría aseverarse que el tiempo se ha acelerado, como también se ha acelerado la música.

Profesor Luis Rojas

Miembro del Comité Editorial

Implementación de un plan de mantenimiento predictivo basado en el análisis de velocidades centrífugas de compresores

Oscar Aguillar¹ y Kenneth Rosillón²

¹Escuela de Tecnología Mecánica: mención Mantenimiento, Instituto Universitario de Tecnología Antonio José de Sucre, Av. La limpia, Sector Los olivos, Maracaibo, Venezuela

Correo: oscaraguillarrossell@gmail.com

²Escuela de Ingeniería en Mantenimiento Mecánico, Departamento de Ingeniería. Instituto Universitario Politécnico Santiago Mariño. Escuela de Tecnología Mecánica: mención Mantenimiento, Instituto Universitario de Tecnología Antonio José de Sucre, Av. La limpia, Sector Los olivos, Maracaibo, Venezuela

Correo: krosillonpsmmcbo@gmail.com

Recibido: 14-06-2016

Aceptado: 20-09-2016

Resumen

La presente Investigación tiene como objetivo la implementación de un plan de mantenimiento predictivo basado en análisis de velocidades para un compresor centrífugo del Laboratorio de Conversión de la Universidad del Zulia. La finalidad del proyecto es determinar en el momento oportuno el deterioro de las piezas del equipo, para reducir la cantidad de mantenimiento correctivo que este y otros compresores sufren. La modalidad de esta investigación es experimental, de tipo descriptiva. La unidad de análisis fue el compresor centrífugo. Las técnicas utilizadas para obtener la información será la observación y se recurrirá a entrevistas no estructuradas como guías para recabar información acerca de los problemas que ahí ocurren, así como también obtuvimos información mediante un instrumento medidor y adquisidor de velocidades en tiempo real. Como parte de los resultados que obtuvimos, estos plantean un rediseño del sistema de potencia anexando más canales a las poleas. Las alarmas y las frecuencias de inspecciones fueron calculadas bajo análisis estadísticos para pronosticar los puntos de falla consiguiéndose así diseñar un plan de mantenimiento predictivo para las piezas cinemáticas del compresor, agregándole un plan de mantenimiento preventivo básico para conseguir una duración optima de esta unidad compresora en el laboratorio.

Palabras claves: Mantenimiento predictivo, análisis de velocidades, compresores centrífugos.

Implementation of a predictive maintenance plan based on analysis of speed centrifugal compressor

Abstract

This research aims to implement a predictive maintenance plan based on analysis of speed centrifugal compressor for the Energy Conversion Laboratory at the University of Zulia. The purpose of the project is to determine in a timely deteriorating pieces of equipment to reduce the amount of this corrective maintenance and other compressors suffer. The method of this research is experimental, descriptive. The unit of analysis was the centrifugal

compressor. The techniques used to obtain information is the recourse to observation and unstructured interviews as guides to collect information about problems that occur there, as well as information obtained by a measuring instrument and acquirer speeds in real time. As part of the results we obtained, these pose a redesign of the power system more channels to attaching pulley. Alarms and frequency of inspections were calculated under statistical analysis to predict failure points thereby achieving design a predictive maintenance plan for the kinematic compressor parts, adding a plan of basic preventive maintenance to achieve optimal duration of this compressor unit in laboratory.

Keywords: Predictive, velocity analysis, centrifugal compressors

Introducción

El mantenimiento al igual que otras ciencias de la ingeniería, ha evolucionado a gran escala, con el paso del tiempo este cambio ha traído nuevas técnicas que se han adaptado al ritmo de vida de las empresas de clase mundial. El mantenimiento, consiste en prevenir fallas de un proceso continuo asegurando la disponibilidad planificada a un nivel de calidad estimado al menor costo dentro de las recomendaciones de garantía y uso de las normas de seguridad y medio ambiente aplicable.

El mantenimiento como un concepto actual no implica reparar la falla de un equipo tan pronto como se pueda sino mantener el equipo en operación a los niveles especificados. En consecuencia, su primera prioridad es prevenir fallas, de este modo reducir los riesgos de paradas imprevistas, por este medio toda empresa logra conservar operable todos y cada uno de sus equipo con el debido grado de eficiencia y eficacia.

Entre las nuevas técnicas se encuentra el mantenimiento predictivo por análisis de velocidades, que es un proceso de seguimiento de los niveles de velocidades en las partes rotativas de los equipos, para determinar el estado de los componentes de las máquinas y detectar fallas potenciales de ajuste o alineación, que puedan afectar los procesos de producción. En la actualidad es una herramienta muy usada para el mantenimiento de equipos y acompañado de otras técnicas predictivas resulta muy confiable.

El trabajo que se describe a continuación tiene como objetivo el análisis de velocidades en el compresor FACING01 ubicado en el Laboratorio de Conversión de Energía perteneciente a la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Zulia, con la finalidad de establecer los parámetros para la implementación de un sistema de mantenimiento predictivo que satisfaga las exigencias de dicha institución, para hacer el cumplimiento de esta investigación se presenta a continuación en tres (3) Fases: en la primer fase encontraremos el planteamiento del problema y los objetivos que se plantearon de la investigación, así mismo en la fase dos (2) se hará referencia a las bases teóricas, finalmente en la fase tres (3) hacemos referencia a los resultados obtenidos a lo largo de la investigación que darán respuesta cada uno de los objetivos planteados con anterioridad a su vez se presentaran las conclusiones para ser aplicadas en la respectiva institución en la cual se realizó el trabajo de investigación.

FASE I

Contextualización del Problema

Según Corro [1] El ser humano siempre ha buscado mejorar los instrumentos que utiliza para aprovechar los recursos dispuestos en el medio ambiente; realidad de la que no escapa la industria mecánica, innovando cada día las maquinarias de las cuales se sirve. Es por ello que a medida que avanza la ciencia y la tecnología se incorporan nuevas técnicas que representan un beneficio evidente en la creciente demanda del mercado global. Todas estas aplicaciones comparten requerimientos como: rendimiento eficiente, alta confiabilidad, durabilidad, y facilidad de mantenimiento, lo cual conlleva a explotar eficaz

y eficientemente la maquinaria instalada.

Los compresores centrífugos son equipos industriales de carácter rotativos que se usan para elevar la presión de un fluido en este caso aire de manera neumática con la finalidad de alimentar cualquier tipo de proceso o instrumento de medición en la misma. Existen muchos tipos de compresores, entre los más resaltantes están los centrífugos y los axiales. El centrífugo es el más comúnmente visto, donde el fluido se comprime perpendicular a su eje de rotación, mientras que el axial es cuando el flujo de aire se comprime en su mismo sentido.

Por su parte Rodríguez, M. [2] establece que la mayoría de los compresores en la industria juegan un papel importante, mientras unos sirven para impulsar a la generación de energía eléctrica por medio de una turbina, los restantes se utilizan para alimentar la instrumentación existente en cualquier industria a nivel mundial que posea su neumática asociada a los instrumentos de medición y control; por otra parte, en cuanto al mantenimiento, los planes preventivos y correctivos, con los que en un 40% de los casos su mantenimiento no es el más óptimo, saltando así de un mantenimiento preventivo a uno correctivo agregándole pérdidas monetarias, de operación y horas de trabajos no solo a los equipos e instrumentos, sino al personal que labora bajo la guía de estos instrumentos en cualquier empresa.

En la actualidad específicamente en la Universidad del Zulia en el laboratorio de turbomaquinas de la escuela de Ingeniería Mecánica, existe un compresor centrífugo de 7.5HP que es vital de examinar en sus síntomas presentes en los cuales son las fallas recurrentes, la gran cantidad de paradas que este sufre y determinar si dichos inconvenientes provienen de las erradas políticas de mantenimiento, que a nivel industrial se puede observar no solo en este tipo de compresores, sino en cualquier maquinaria de tipo industrial que se maneje con análisis de velocidad para todas sus partes en movimiento, por lo que hoy en día no existe un plan de mantenimiento tal, que satisfaga los requerimientos de los fabricantes. Si en la Universidad no se mejorara estas condiciones de fatiga en los distintos tipos de maquinaria el especial el compresor FACING01, se podrían tener accidentes fatales, por lo que es importante llevar al día los historiales de mantenimiento.

Por tal razón, surge un plan de total aplicación para pronosticar el punto futuro de falla como lo define Primera [3], que no es más que un mantenimiento predictivo, de tal forma que dicho componente pueda reemplazarse con base a un plan justo antes de que falle, utilizando la técnica de análisis de velocidad para verificar las condiciones rotativas de la máquina y el estado de desgaste en poleas y correas. Por lo antes expuesto, se propone el mantenimiento predictivo como solución a los problemas presentes en este equipo en el laboratorio de turbomaquinas en la Universidad del Zulia.

Ahora bien, se busca establecer una buena práctica de velocidad en los motores del compresor con el objetivo de suministrar información y adelantarse a tomar acciones, evitando la fricción y el desgaste que se encuentra siempre presente en los sistemas y en las máquinas; así el roce crea una pérdida de energía mecánica perjudicial para el mecanismo, que se traduce en un calentamiento de las piezas que estén en contacto, ocasionando desgaste, deformaciones y eventualmente adhesión.

FASE II

Fundamentos Teóricos

Mantenimiento predictivo

Según Perozo [4] A partir de 1966 con el fortalecimiento de las asociaciones nacionales de mantenimiento, creadas al final del período anterior y la sofisticación de los instrumentos de protección y medición, la ingeniería de mantenimiento, pasa a desarrollar criterios de predicción o previsión de fallas, visando la optimización de la actuación de los equipos de ejecución de mantenimiento. Esos criterios,

conocidos como mantenimiento predictivo, fueron asociados a métodos de planeamiento y control del mantenimiento.

Luego a principios de la década de 1990 apareció en la industria este tipo de mantenimiento, aunque todavía en la actualidad no es muy usado en muchos sectores. El sustento tecnológico de este mantenimiento consiste en la aplicación de algoritmos matemáticos agregados a las operaciones de diagnóstico, que juntos pueden brindar información referente a las condiciones del equipo. Tiene como objetivo disminuir las paradas por mantenimientos preventivos, y de esta manera minimizar los costes por mantenimiento y por no producción, es decir, disminuir los tiempos improductivos.

De este modo el mantenimiento predictivo, es una técnica para pronosticar el punto futuro de rotura o avería de un componente de una máquina, de tal forma que dicho componente pueda reemplazarse, con base en un plan, justo antes de que falle. Así, el tiempo muerto del equipo se minimiza y el tiempo de vida del componente se maximiza.

De tal manera se deben realizar inspecciones periódicas a la maquinaria, generalmente con equipo de alta tecnología para determinar el estado en que se encuentran trabajando los elementos. Así se programan los puntos de la maquinaria que se quieren inspeccionar, rutas, y la frecuencia con que se deben monitorear. Esta información se almacena en sistemas de información que permiten realizar un seguimiento exacto de estado de funcionamiento de la máquina. En contraste con los tipos de mantenimiento arriba mencionados, el mantenimiento predictivo no solo se enfoca al elemento de máquina, sino también al ambiente en que este opera.

La organización para el mantenimiento predictivo consiste en medir diversos parámetros que muestran una relación predecible con el ciclo de vida del componente. Algunos ejemplos de dichos parámetros son: vibración de cojinetes, temperatura de las conexiones eléctricas, resistencias del aislamiento de la bobina de un motor, viscosidad en fluidos (especialmente en aceites y lubricantes).

Técnicas aplicadas para el mantenimiento predictivo

Basados en Espinosa [5] El cual indica la necesidad de intervención con base en el estado de equipamiento. La evaluación del estado se da a través de la medición, acompañamiento o monitoreo de parámetros.

Ultrasonido

El análisis por Ultrasonido Industrial (UT) se define como un procedimiento de inspección no destructiva de tipo mecánico, que se basa en la impedancia acústica, la que se manifiesta como el producto de la velocidad máxima de propagación del sonido entre la densidad de un material. El ultrasonido es una vibración mecánica con un rango mayor al audible por el oído humano que se transmite a través de un medio físico y es orientado, registrado y medido en Hertz con ayuda de un aparato creado para ese fin.

Análisis por líquidos penetrantes

La inspección por Líquidos Penetrantes es empleada para detectar e indicar discontinuidades que afloran a la superficie de los materiales examinados. En términos generales, esta prueba consiste en aplicar un líquido coloreado o fluorescente en la superficie a examinar, el cual penetra en las discontinuidades del material debido al fenómeno de capilaridad. Después de cierto tiempo, se remueve el exceso de penetrante, mediante el uso de algún material absorbente (papel, trapo, etc.) y se aplica un revelador de color diferente al líquido penetrante, el cual generalmente es un polvo blanco, que absorbe el líquido que ha penetrado en las discontinuidades o aberturas superficiales y sobre la capa de revelador se delinea el contorno de ésta.

Análisis con partículas magnéticas

La inspección por partículas magnéticas permite detectar discontinuidades superficiales y sub-superficiales en materiales ferromagnéticos. Se selecciona usualmente cuando se requiere una inspección más rápida que con los líquidos penetrantes. El principio del método es la formación de distorsiones del campo magnético o de polos cuando se genera o se induce un campo magnético en un material ferromagnético, es decir, cuando la pieza presenta una zona en la que existen discontinuidades perpendiculares a las líneas del campo magnético, éste se deforma o produce polos. Las distorsiones o polos atraen a las partículas magnéticas, que fueron aplicadas en forma de polvo o suspensión en la superficie sujeta a inspección y que por acumulación producen las indicaciones donde exista distorsión en las líneas de flujo (fuga de campo) que se observan visualmente de manera directa o bajo luz ultravioleta.

Análisis por radiografía industrial (rayos X)

La inspección por RI se define como un procedimiento de inspección no destructivo de tipo físico, diseñado para detectar discontinuidades macroscópicas, variaciones y/o fallas en la estructura interna o configuración física de un material el cual absorbe de forma diferenciada radiación penetrante. La Radiografía Industrial es uno de los métodos más antiguos y de mayor uso en la industria. Debido a esto, continuamente se realizan nuevos desarrollos que modifican las técnicas radiográficas aplicadas al estudio no sólo de materiales, sino también de partes y componentes; todo con el fin de hacer más confiables los resultados durante la aplicación de la técnica.

Análisis motores eléctricos

El objeto del análisis eléctrico como técnica de mantenimiento predictivo es el de realizar estudios eléctricos sobre aquellos equipos que pueden presentar averías de origen electro-mecánico. En función de la corriente de alimentación, trifásica o continua, del equipo (generalmente motores eléctricos) que se desea analizar, se pueden verificar las siguientes condiciones:

- Calidad de la alimentación
- Estado del circuito
- Estado del aislamiento
- Estado del estator
- Estado del rotor
- Excentricidades en el entre-hierro

El análisis de corriente de un motor eléctrico puede desempeñarse a modo de control de calidad, como herramienta de tendencia o como emisor de un diagnóstico inmediato del estado del mismo.

Análisis de aceites

El análisis de aceite consiste en una serie de pruebas de laboratorio que se usan para evaluar la condición de los lubricantes usados o los residuos presentes. Al estudiar los resultados del análisis de residuos, se puede elaborar un diagnóstico sobre la condición de desgaste del equipo y sus componentes. Lo anterior, permite a los encargados del mantenimiento planificar las detenciones y reparaciones con tiempo de anticipación, reduciendo los costos y tiempos de detención involucrados.

Vibraciones mecánicas

Las vibraciones mecánicas, es un buen parámetro para poder determinar la condición de funcio-

namiento de una máquina o de los elementos que la componen. Todas las máquinas vibran y cada una tiene un patrón normal de funcionamiento. A través del análisis de vibraciones, se logra identificar un funcionamiento fuera del rango normal de vibración correspondiente a una falla potencial en los equipos e inclusive precisar la causa raíz de ese problema. El análisis de vibraciones es una herramienta fundamental en un programa de mantenimiento predictivo, permitiendo reducir costos de mantenimiento, paros inesperados, pérdidas de producción y aumentando la disponibilidad de los equipos.

Análisis cinemático

- El análisis de velocidades por puntos de contacto se realiza bajo el siguiente procedimiento:
- Se prepara la pieza a estudiar, preferiblemente los alabes de los motores en frío (sin carga).
- Se selecciona el alabe objeto de estudio, y se le coloca un cinta medidora de velocidad en cualquier alabe.
- Se enciende el equipo.
- Observar que la cinta medidora de velocidad sobresalga al giro continuo del rotor (motor), una vez conseguido y observado esto, apuntar el láser (digital) del medidor RPM perpendicular a la superficie o eje de giro.
- Tomar lecturas repetidas a lo largo del tiempo en cada ciclo de trabajo (siendo el ciclo de trabajo cuando enciende y apaga el motor producto de un presostato u otro elemento electrónico - eléctrico)
- Finalmente determinar el rendimiento velocidad Vs tiempo para el motor, mediante una serie de ensayos promediados a lo largo del tiempo de estudio.

FASE III

Condición de funcionamiento de los compresores

La condición operativa no es más que el estado en un punto temporal determinado del equipo, en base a la presente investigación como se mencionó en reiteradas oportunidades este compresor se utiliza tanto para el suministro de aire de proceso como de aire de instrumentos. Según la técnica metodológica de observación directa, los compresores actualmente presentan fallas debido a la ausencia de un mantenimiento; de acuerdo a las partes de los compresores describiremos a continuación el área neumática, mecánica y eléctrica respectivamente.

Puntos en los cuales serán medidas las velocidades producidas y las alarmas respectivas para gráficos de control

En esta etapa fueron determinados los puntos de medición en cada uno de los compresores, los puntos fueron marcados con el fin de realizar las mediciones siempre en el mismo lugar para lograr uniformidad en los resultados. Los puntos de medición fueron ubicados los más cercanos posible a cada polea de la máquina, por lo que fue necesario conocer la configuración interna y posiciones de las piezas presentes en cada compresor, dados en la Tabla 1.

Las mediciones fueron realizadas en cada punto en tres direcciones vertical (V), horizontal (H) y axial (A), y dependiendo de la configuración del equipo pueden existir, varios puntos de medición. En la Figura se muestra el esquema con 3 puntos de medición para el conjunto motor eléctrico-mecánico del compresor.

Tabla 1. Puntos de medición general para el sistema de transmisión

Puntos de Medición	
Polea conductora	Polea Conducida
Punto N° 1: Horizontal: (1H) Axial: (1A)	Punto N° 2: Horizontal: (2H) Axial: (2A)
Puntos de Medición	
Motor Eléctrico (Parte Posterior)	
Punto N° 3: Horizontal: (3H) Axial: (3A)	

Fuente: Propia (2014)

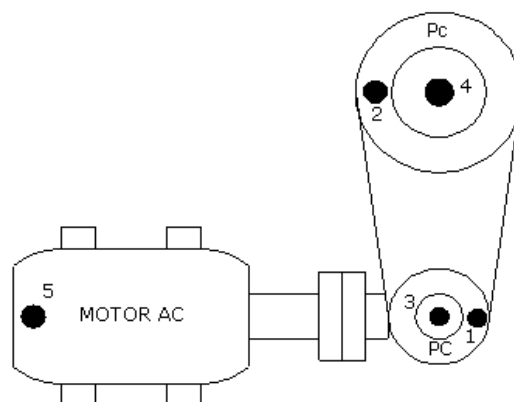


Figura 1. Puntos de medición. Fuente: Propia (2014).

Niveles de pre-alarma, alarma para cada uno de los compresores

Se determinaron los niveles de pre-alarma y de alarma de la velocidad lineal de las correas, así como también de la velocidad angular (RPM) permisibles de acuerdo al tipo, tamaño y potencia de las máquinas compresoras. Se utilizó un modelo aproximado de la norma ISO23-72 [6] puesto a que no existe norma que regule la velocidad en RPM como tal para establecer niveles de alarma para estudios de velocidad en poleas, mostrado en la Tabla 2.

Aunado a esto esta norma se tomara como indicador foco de comparación debido a que el supervisor del laboratorio no poseía ningún historial de velocidades, ni mucho menos niveles propios de alarma establecidos, que pudieran describir el comportamiento de los niveles de velocidad en los equipos a lo largo de su funcionamiento. También fueron determinados valores de pre-alarma y alarma en unidades de velocidad lineal (mm/s), estos fueron asignados con ayuda del Profesor Jefe del laboratorio de turbomaquinas y de textos especializados, debido a que no sedisponía de normas que asignarán valores de velocidad angular globales en unidades de revoluciones por minutos (RPM).

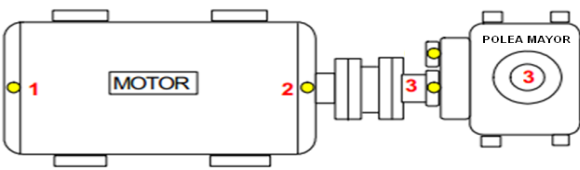
Tabla 2. Norma ISO-2372 [6]

45,00	NO PERMISIBLE	NO PERMISIBLE	NO PERMISIBLE	NO PERMISIBLE
28,00				
18,00				
11,20				
7,10	LÍMITE	LÍMITE	LÍMITE	LÍMITE
4,50			ADMISIBLE	ADMISIBLE
2,20				
1,80	ADMISIBLE	ADMISIBLE	NORMAL	NORMAL
1,12				
0,71				
0,45	NORMAL	NORMAL	NORMAL	NORMAL
0,28				
0,18				
Vel. (mm/s)	Máquinas Pequeñas (<15KW)	Máquinas Med. (15-75 KW) (300 KW, Soporte Especial)	Máquinas Grandes (base rígida) (>75KW)	Máquinas Grandes (alta velocidad) (>75KW)

Fuente: ISO (2000).

Ahora bien, basados en esta norma y como se mencionó anteriormente, por experiencia del supervisor y jefe del laboratorio, aunado a la experiencia vivida durante la investigación, a continuación se mostrarán los niveles de alarma pero en función de la velocidad angular (RPM) del compresor, para los distintos puntos de medición en los compresores existentes en la facultad de ingeniería, indicados en la Tabla 3.

Tabla 3. Límites de alarmas establecidos para el compresor

 Universidad del zulia Facultad de ingeniería scuela de ingeniería mecánica Lab. Turbomaquinas (facing) 		Formato de captura de informacion (Niveles de alarmas-niveles de velocidad)		
Diagrama esquemático del equipos (Puntos de medición)		Nombre del equipo: compresor Número del equipo: facing01		
 Diaria Quincenal Semanal Mensual Trimestral Semestral		Frecuencia de Monitoreo		
Puntos de Medición Compresor 1				
Puntos de medición	Unidades	Alarmas	Fallas	RPM de giro
1	1	(1500-2300) RPM	(1450-2400)RPM	1800 RPM
2	1	(400-1100) RPM	(350-1200)RPM	720 RPM
3	1	(1350-2070) RPM	(1305-2160)RPM	1620 RPM
Análisis en Tiempo de la velocidad – Ciclo 1				
Descripción	Punto 1 (Min)	Punto 2 (Min)		Punto 3 (Min)
RPM Mínima	1500 RPM	400 RPM		1350 RPM
RPM Promedio	1900 RPM	750 RPM		1710 RPM
RPM Máxima	2300 RPM	1100 RPM		2070 RPM
Nivel de Alarma	1450-2350 RPM	390-1150 RPM		1340-2100 RPM
Nivel de Falla	2500 RPM	1300 RPM		2200 RPM

Fuente: Propia (2014)

Frecuencias en las cuales serán monitoreados los compresores

Para comenzar evaluando en función de la severidad la frecuencia de fallas, entonces comencemos por determinar la mantenibilidad del compresor de aire, para luego determinar la confiabilidad y probabilidad de falla en general, pasando de un periodo infantil a uno de mortalidad, donde se analizaran las distintas fallas pero en especial las fallas relacionadas y sus tiempos con el sistema de transmisión de velocidades del conjunto motor electromecánico unidos por las poleas.

Mantenibilidad del compresor

$$\sum y_i = nAm + Bm \sum x_i \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\sum x_i y_i &= Am \sum x_i + Bm \sum x_i^2 \\ -3854,72 &= Am(1007.58) + Bm(373535) \\ Am &= -0.47 \quad Bm = 0.00904 \\ a &= -Bm = -0.00904 \\ U &= \frac{A}{a} = \frac{-0.47}{-0.00904} = 52\end{aligned}\tag{3}$$

Para un tiempo máximo de reparo de 480 horas que equivale a 3 meses de paro de equipo, entonces la probabilidad de que el equipo pueda ser reparado con un mantenimiento es de:

$$\begin{aligned}P(t) &= e^{-e^{a(t-u)}} \\ P(480) &= e^{-e^{(-0.00904)(480-52)}} = 0.9793 \approx 97.93\%\end{aligned}\tag{4}$$

Confiabilidad del compresor

De las ecuaciones 1 y 2 respectivamente se crean las ecuaciones 5 y 6 respectivamente y sustituyendo los valores aplicados a la confiabilidad del equipo se tiene:

$$\sum y_i = nAc + Bc \sum x_i\tag{5}$$

$$\sum x_i y_i = Ac \sum x_i + Bc \sum x_i^2\tag{6}$$

$$-57,14 = (102)Ac + Bc(578,21)$$

$$-235.08 = Ac(578,21) + Bc(3335,47)$$

$$Ac = -9,27 \quad Bc = 1.53$$

$$\alpha = e^{-Ac/Bc} = e^{-(-9,27)/1,53} = 427,87 \rightarrow \lambda = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{427.87} = 0.00233s^{-1}$$

$\beta = Bc = 1,53$ El compresor trabaja bajo un esquema diario de 8 horas mensualmente en días hábiles lo que equivale a un número de 160 horas, entonces la confiabilidad para ese tiempo de operación viene dada por:

$$R(t) = e^{-(t/\alpha)^\beta}\tag{7}$$

$$R(160) = e^{-(160/427,87)^{1,53}} = 0.80 \approx 80\%$$

De acuerdo a las confiabilidades individuales de las piezas cinemáticas tenemos que:

1. Confiabilidad del Motor Mecánico= 56.6%
2. Confiabilidad del Motor Eléctrico=100%
3. Confiabilidad de las poleas=100%

a. Según el historial de fallas del motor mecánico (axial)

$$\lambda = \frac{\text{Numero de fallo}}{\text{Horas de Operacion de la unidad}} \quad (8)$$

Tiempo de operación: 3 meses que equivalen a 480 Horas

Tiempos de parada total: 127 horas

Número total de horas de operación de la unidad: 480 horas – 127 horas= 353 horas

$$\lambda = \frac{10 \text{ Fallas}}{353 \text{ horas operacion}} = 0.028 \text{ fallas / horas}$$

De la misma manera se calcula para el motor eléctrico y las poleas respectivamente:

$$\lambda_{\text{Motor Electrico}} = 0.070 \text{ Fallas / hora}$$

$$\lambda_{\text{poleas}} = 1.14 \text{ Fallas / hora}$$

Basado en el análisis cinemático a los componentes rotativos del compresor, extrajimos las curvas de acuerdo a la respuesta que arrojo la herramienta de medición. Para ello se vaciaron los datos en el programa Excel desde el instrumento de medición como una adquisición de datos del mismo, en lo cual se midió la velocidad de acuerdo a las rutas y puntos de medición ya establecidos para arrojar resultados contundentes en un lapso de 60 minutos por tres (3) meses consecutivos, tiempo en el cual el presostato por protección apaga el compresor hasta que el tanque de almacenamiento ya previamente cargado se descargue conforme se vaya utilizando el aire para los distintos procesos del laboratorio de controles e instrumentación o a su vez para el mismo laboratorio de turbomaquinas.

Para poder determinar el intervalo de inspecciones para cada elemento conductor o conducido de velocidad, es necesario determinar la cantidad de modos de falla y la cual estará expresada en fallas por inspección. En líneas generales, se mostrara un promedio de todas las muestras tomadas, asumiendo como una media móvil de gráficos entre las pruebas realizadas en las distintas direcciones y los distintos sentidos.

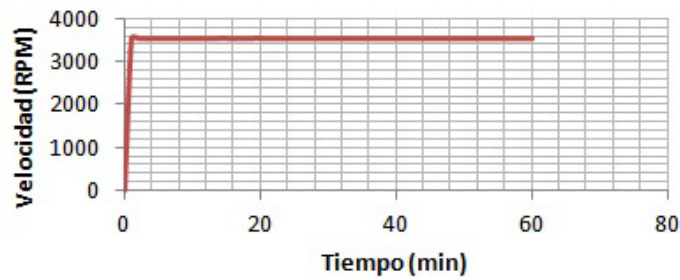


Figura 2. Análisis de velocidades de la polea conductora dirección radial (1), sentido vertical.
Fuente: Propia (2014).

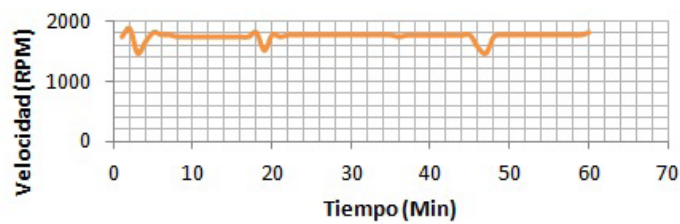


Figura 3. Análisis de velocidades de la polea conducida dirección radial (1), sentido vertical.
Fuente: Propia (2014).

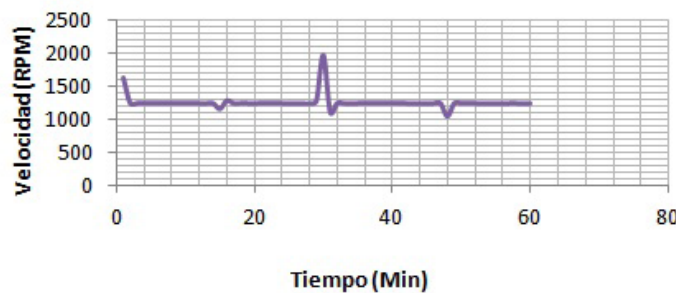


Figura 4. Análisis de velocidades del motor eléctrico dirección radial (3), sentido vertical.
Fuente: Propia (2014).

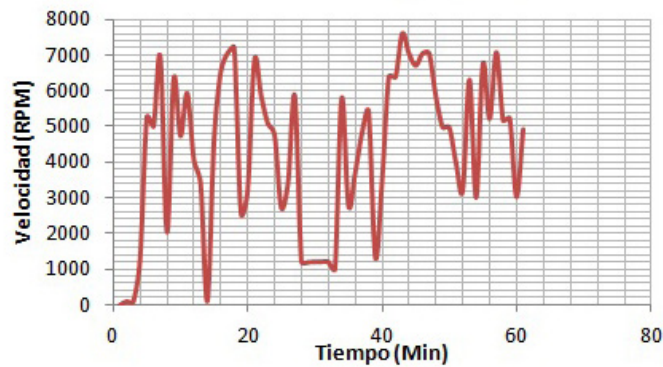


Figura 5. Análisis de velocidades de la polea conductora dirección axial (1), sentido horizontal.
Fuente: Propia (2014).

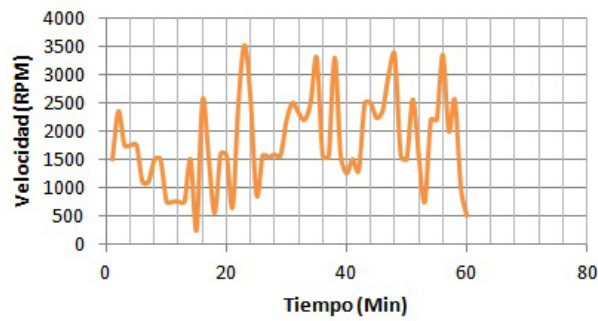


Figura 6. Análisis de velocidades de la polea conducida dirección axial (2), sentido horizontal.
 Fuente: Propia (2014).

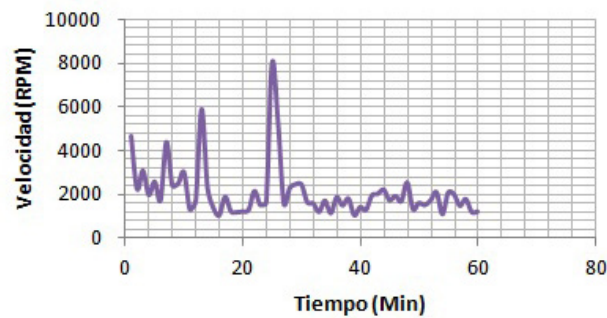


Figura 7. Análisis de velocidades de la polea conducida dirección radial (3), sentido vertical.
 Fuente: Propia (2014).

Calculo de la frecuencia de inspecciones para evitar fallos

En referencia a los puntos de medición y a los sentidos de medición para el conjunto de velocidad entre las cuales están: polea conductora y conducida respectivamente, así como también el conjunto energético eléctricamente como lo es el motor de inducción trifásica y el mecánico de pistones teniendo así 2 pistones de compresión y expansión que le dan la fuerza de compresión al aire para su salida.

Punto numero 1 radial polea conductora

Fallas que pueden ser detectadas: 1 falla por pico.

$$= \frac{F_i}{\lambda} = \frac{1 \text{ falla por inspeccion}}{1.14 \text{ fallas / horas}} = 0.877 \frac{\text{horas}}{\text{inspeccion}} \quad (9)$$

$$C = \frac{C_i}{C_f} = \frac{\$10}{\$20000} = \frac{600Bs}{1200000Bs} = 0.0005 \quad (10)$$

$$A = -\ln(1 - e^{-\lambda}) = -\ln(1 - e^{-1.14}) = 0.385 \quad (11)$$

$$I = C \times F \times A = 0.0005 \times 0.877 \times 0.385 = 0.000167 \text{ horas / inspeccion} \quad (12)$$

$$f = \frac{1}{0.000167 \text{ horas / inspecciones}} = 5971.0404 \text{ Horas / mes} \quad (13)$$

Teniendo en cuenta las relaciones de equivalencia entre días, meses y años, tenemos:

1 año → 12 meses

1 año → 8640 horas

1 mes → 30 días

$f \approx 8 \text{ meses}$

De la misma manera se procede con los demás puntos y rutas de medición para así obtener los siguientes resultados:

Tabla 4. Frecuencia de inspecciones en los puntos de medición.

Objeto de estudio	Punto de medición	Frecuencia
Polea conducida	2-radial	21 días
Motor Eléctrico	3-radial	Diario
Polea Conductora	1-axial	6 días
Polea Conducida	2-axial	30 minutos
Motor Eléctrico	3-axial	3 horas

Fuente: Propia (2014)

Plan de mantenimiento Preventivo-Predictivo

Plan de mantenimiento Preventivo

Objetivos del plan de mantenimiento preventivo

1. Mantener en óptimo funcionamiento la maquinaria, en este caso el compresor en el laboratorio de turbomaquina mediante una agenda de mantenimientos preventivos y tareas cotidianas.
2. Minimizar el número de paros en producción por falta de mantenimiento y reparaciones
3. Análisis, desarrollo e implementación de metodologías que puedan alargar el tiempo de vida de los compresores.

Alcance

Atender todas las necesidades de mantenimiento para los equipos del laboratorio que puedan ocasionar impactos en seguridad, producción y medio ambiente adaptándonos a las políticas vigentes de mantenimiento de la Universidad del Zulia, pero sin dejar de innovar y proponer nuevas estrategias.

Justificación

La implementación de este plan acarrea beneficios al laboratorio de turbomaquinas y en especial al de instrumentación y control ya que con un nuevo programa actualizado de actividades de mantenimiento preventivo, podremos garantizar la vida útil del compresor, y las practicas u otras actividades no se verían afectadas.

Tabla 5. Plan de Mantenimiento para el sistema mecanico-neumatico del compresor.

No.	Servicio	Ee	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
1	Filtro de aspiración	FS	X					
		OP						
2	Cambio de aceite	FS	X	X	X	X	X	X
		OP						
3	Limpieza VálvulasAntiretorno	FS	X			X		
		OP						
4	Control de uniones y tornillos	FS						
		OP	X			X		
5	Cambio de mangueras hidráulicas	FS	X					
		OP						
6	Cambio de mangueras neumáticas	FS	X					
		OP						
7	Calibración del Presostato	FS	X			X		
		OP						
8	Manómetros de presión	FS	X			X		
		OP						

Fuente: Propia (2014)

Tabla 6. Plan de Mantenimiento para el sistema eléctrico del compresor.

No.	Servicio	E	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
9	Contactador	FS	X					
		OP						
10	Limpieza de líneas de aire	FS	X					
		OP						
11	Pulmon de almacenamiento	FS	X					
		OP						
12	Filtros de líneas	FS	X					
		OP						
13	Breaker principal	FS	X					
		OP						
14	Líneas eléctricas (cables)	FS	X		X		X	
		OP						
15	Puestas a Tierra	FS						
		OP		X				X

Fuente: Propia (2014)

Plan de mantenimiento Predictivo

Objetivos del plan de mantenimiento preventivo

Mantener en óptimo funcionamiento la maquinaria, en este caso el compresor en el laboratorio de turbomaquina mediante una agenda de inspecciones programadas con la finalidad de predecir ciertos fallos.

Minimizar el número de paros en producción por falta de mantenimiento y reparaciones correctivas o aplicación de malas políticas de mantenimiento preventivo.

Análisis, desarrollo e implementación de metodologías que puedan alargar el tiempo de vida de los compresores mediante la recolección de data historial de cada uno de los componentes cinemáticos del compresor.

Alcance

Atender todas las necesidades de mantenimiento para los equipos del laboratorio que puedan ocasionar impactos en seguridad, producción y medio ambiente adaptándonos a las nuevas políticas sobre las inspecciones predictivas de mantenimiento en la Universidad del Zulia, pero sin dejar de innovar y proponer nuevas estrategias en pro de mejoras continuas para el compresor.

Justificación

La implementación de este plan acarrea beneficios al laboratorio de turbomaquinas y en especial al de instrumentación y control ya que con un nuevo programa actualizado de inspecciones predictivas, se podrá garantizar la vida útil del compresor, y las practicas u otras actividades no se verían afectadas.

Conclusiones

De acuerdo a la investigación planteada, el análisis de velocidades implementado por un mantenimiento predictivo en compresores centrífugos fue realizado en un esquema de tiempo apretado pero exitoso, en la cual Se determinó por medio de las condiciones operativas que los compresores estaban urgidos de un plan de mantenimiento debido a la gran cantidad de fallas inesperadas y en lugares menos pensados.

Con referencia a la toma de dato perteneciente al procedimiento de elección de puntos y alarmas se escogieron los puntos de medición en los equipos de acuerdo a los elementos que los conforman y su configuración interna, tratando siempre de ubicarlos lo más cercanos a los elementos de velocidad de acuerdo a sus direcciones axiales y radiales de medición.

Se establecieron niveles de pre alarma y alarma a través de la norma ISO 2372, los cuales permitirán conocer el estado cinemático de los equipos al inicio del programa del mantenimiento aunado se eligieron intervalos personalizados de acuerdo a la experiencia vivida al momento de iniciar los experimentos, observando así el comportamiento durante ese lapso de tiempo de prueba.

Basados en los fundamentos teóricos, se establecieron los criterios de severidad, basado en las fallas y la confiabilidad de cada equipo, aunado a los gráficos de posibles fallas obtenidos por medio de la herramienta de medición de velocidad se establecieron frecuencias de monitoreo que van desde horas de estudio previo hasta un máximo de 8 meses continuos con la finalidad de prevenir la falla mediante la inspección predictiva.

Mediante la observación directa la mayor cantidad de fallas detectadas en el análisis se ubicaron

en los sistemas eléctricos y mecánicos, por lo que hay que tener sumo cuidado de todos los elementos que lo componen por lo que de acuerdo a los análisis de criticidad realizados, el motor eléctrico tiende a sufrir consecuencias catastróficas de no recibir un adecuado mantenimiento

Finalmente, se realizaron 2 planes seguidos; un plan de mantenimiento preventivo rutinario el cual es necesario para la preservación continua de los elementos aledaños a los componentes cinemáticos determinando así los tiempos de operación según el historial de fallas presentado. Seguidamente se realizó el plan de mantenimiento predictivo para los elementos anteriormente mencionados como productores o receptores directos de velocidad, arrojando como resultado una intensa inspección y monitoreo de las condiciones de operación, esto debido a las condiciones de vejez en que se encuentran los compresores actualmente.

Referencias bibliograficas

1. Corro, Y., Compresor Centrifugo Trabajo Final [Documento en línea] Disponible: <http://es.scribd.com/doc/40648770/Compresor-Centrifugo-Trabajo-Final>. Revisión. Julio 2013 (2010).
2. Rodríguez M., (editorial Limusa), El mantenimiento industrial y aplicaciones. 1era edición. Revisión: Agosto 2013 (2008).
3. Primera, (2002) no se encuentra en la bibliografía pero si en el contenido
4. Perozo, (Editorial LUZ), EL mantenimiento Industrial. 2da edición. Revisión: septiembre 2013 (2004).
5. Espinosa, (Editorial Limusa), Fundamentos de Mantenimiento Predictivo y Aplicaciones. 1era edición. Revisión. Septiembre 2013 (2010).
6. Normas ISO, Norma 2372 Fundamentos de Velocidad y Vibración de Maquinas rotativas. Revisión. Noviembre 2013 (2000).

Accidente: Fenómeno Estocástico

José V. Ferrer Bastidas¹ y Naudy Leal Wilhelm²

¹Escuela de Ingeniería Industrial. Facultad de Ingeniería. Universidad Rafael Urdaneta. Maracaibo, Estado Zulia, Venezuela. josevicentefb@gmail.com.

²Escuela de Ingeniería Industrial. Facultad de Ingeniería. Universidad del Zulia. Maracaibo, estado Zulia, Venezuela. nleal@fing.luz.edu.ve

Recibido: 12-07-2016.

Aceptado: 04-10-2016.

Resumen

La presente investigación tiene como propósito dilucidar si los accidentes pueden ser considerados como fenómenos estocásticos (aleatorios). El estudio consistió en la ubicación bibliográfica documental, que abarcó la revisión de teoría relacionada con probabilidad y accidentes en el contexto laboral. Una vez analizada la información se concluye que los accidentes son fenómenos estocásticos, lo que significa que la aplicación del teorema de Bayes constituye una herramienta útil para la determinación de las causas de accidentes y por consiguiente para la formulación de medidas de prevención eficaces que contribuyan a la reducción de los índices de accidentalidad de los centros de trabajo.

Palabras clave: Proceso estocástico, teorema de Bayes, riesgo y accidentes

Accident: Stochastic Phenomenon

Abstract

This research aims to determine whether accidents can be considered as phenomena stochastic (random) . The study consisted of a literature review that included a review of probability theory and related accidents in the employment context . Having analyzed the information it is concluded that accidents are stochastic phenomena , which means that the application of Bayes' theorem is a useful tool for determining the causes of accidents and therefore to the formulation of effective preventive measures that contribute to reducing accident rates in the work-place.

Key words: Stochastic process , Bayes theorem , risk and accidents.

Introducción.

El hombre en su día a día toma decisiones bajo escenarios de incertidumbre, por lo que basa dichas decisiones (muchas veces de forma intuitiva) en la probabilidad de que alguno de los escenarios se materialice.

En el ámbito académico, la mayoría de los ejemplos asociados a la probabilidad tienen que ver con juegos de azar, tales como, lanzamiento de dados, monedas, juegos de carta, entre otros; como característica común, estos eventos están asociados a un riesgo (de perder dinero), lo mismo ocurre al momento

de decidir tomar un automóvil, un avión o caminar, en todos los casos se está expuesto a la ocurrencia de un accidente, por lo que se usa de forma intuitiva la noción de probabilidad para valorar el riesgo (Evans y Rosenthal [1]).

De forma análoga sucede en el contexto laboral, es decir, todas las actividades de trabajo poseen un riesgo de ocurrencia de accidentes. En virtud de que las organizaciones son sistemas complejos, se pone en evidencia la necesidad de estudiar los accidentes haciendo uso de los elementos que presenta la teoría de la probabilidad para poder determinar las causas que los originan y tomar decisiones eficaces para su prevención.

En la actualidad, la prevención de accidentes resulta de vital importancia, debido a que los empleadores además de tener el compromiso moral de garantizar la integridad física y mental de los trabajadores, también tienen el deber de cumplir con lo establecido en la Ley Orgánica de Prevención, Condiciones y Medio Ambiente de Trabajo (LOPCYMAT), sin dejar de lado el hecho de que toda estrategia de prevención de accidentes persigue la continuidad de las operaciones, además de aumentar la disponibilidad de maquinaria y equipos, lo que favorece a la rentabilidad de las organizaciones.

Existen diversos métodos que ayudan a la prevención de accidentes en el ámbito laboral, tales como la aplicación de técnicas de análisis de riesgo, el uso de tecnología para la protección del trabajador que este expuesto a un peligro que no pueda ser eliminado y la investigación de accidentes, la cual se considera como una herramienta de prevención debido a que suministra información sobre el suceso ocurrido y permite la generación de una base de datos que facilita al profesional de seguridad la comprensión de lo que ocurre en el entorno laboral-lecciones aprendidas-, utilizando como base los principios de la estadística, específicamente lo que respecta a la recolección, organización y análisis de los datos para hacer estimaciones en el tiempo que le ayudarán en la toma de decisiones para la formulación de estrategias de prevención, inversiones en materia de seguridad y salud en el trabajo, entre otros aspectos.

El propósito de esta investigación es describir los accidentes como fenómenos estocásticos y así aplicar los teoremas asociados con la probabilidad condicional y la estadística bayesiana en la determinación de las causas que les dan origen, de manera que esta información pueda utilizarse para la prevención de los mismos.

Teoría de la Probabilidad.

La teoría de la probabilidad se encarga del estudio de los fenómenos aleatorios, en este sentido, Martín y Ruiz [2] exponen que un fenómeno aleatorio es aquel en el que no es posible predecir con certeza los resultados de cada manifestación, aunque se produzca en condiciones idénticas, por lo que únicamente los resultados son conocidos después de su realización.

Según Suárez [3] es mediante la probabilidad que el individuo intenta realizar mediciones sobre el nivel de incertidumbre asociado a los fenómenos aleatorios. En un sentido más amplio, la teoría de la probabilidad tiene como propósito proporcionar un modelo matemático adecuado, aplicable a la descripción e interpretación de los fenómenos aleatorios.

Según Evans y Rosenthal[1] la comprensión de la teoría de la probabilidad posibilita el valorar correctamente las probabilidades en las situaciones cotidianas, lo que favorece a la toma de decisiones. En palabras formales, un modelo de probabilidad consiste en un conjunto no vacío llamado espacio muestral S , un conjunto de sucesos que son subconjuntos de S , y una medida de la probabilidad P que asigna un valor de probabilidad comprendido entre 0 y 1 a cada suceso y cumple que $P(\emptyset)=0$ y $P(S)=1$ y P es aditiva.

Modelo Estocástico.

Los modelos estocásticos son aplicables a cualquier sistema que comprenda variabilidad al azar con el transcurso del tiempo. En geofísica se han usado para la predicción de la magnitud y localización de los terremotos. En geografía, para estudiar la ubicación de las zapaterías de una ciudad en crecimiento y en la industria se han usado para predecir accidentes (Coleman [4]). El modelo estocástico es utilizado como base del estudio de los procesos estocásticos.

Procesos Estocásticos.

La palabra estocástico es sinónimo de aleatorio. Según Ferrer [5], un proceso estocástico es un sistema que se desarrolla en el tiempo mientras que pasa por fluctuaciones al azar. Los procesos estocásticos proporcionan modelos de comportamiento ideales puesto que incluyen un poco de aleatoriedad del mundo real, proporcionando así una imagen mucho mejor de este mundo que la que posiblemente se lograría con modelos en los que se desprecia ese comportamiento aleatorio.

En este orden de ideas, Çinlar [6] argumenta que los procesos estocásticos constituyen una herramienta estadística que surge ante la necesidad de modelar el comportamiento de experimentos aleatorios que varían en el tiempo o que depende de alguna otra variable determinista que se modificará durante el tiempo.

Teorema de Bayes.

Es un teorema propuesto por Thomas Bayes, el cual a primera vista no es más que una aplicación de las probabilidades condicionales, sin embargo, es clave en el desarrollo de la inferencia estadística, en la que se emplea la interpretación subjetiva de la probabilidad (Canavos [7]). El teorema viene dado por la expresión presentada en la ecuación 1.

$$P(B_j | A) = [P(B_j)P(A | B_j)] / \sum_{i=1}^n [P(B_i)P(A | B_i)] \quad (\text{ecuación 1})$$

El teorema de Bayes es de enorme relevancia debido a que vincula la probabilidad de A dado B con la probabilidad de B dado A. Lo anterior significa que sabiendo la probabilidad de que ocurra un accidente dado que estaba lloviendo, se podría saber, la probabilidad de que estaba lloviendo cuando ocurrió un accidente. Según lo expuesto anteriormente, queda en evidencia la importancia del teorema, pues tal como afirma Suarez [3], resulta de interés cuantificar la probabilidad de una causa específica (evento A) habiendo ocurrido un determinado efecto (evento B).

Estadística Bayesiana.

El análisis Bayesiano se basa en la interpretación subjetiva de la probabilidad, y está centrado en su totalidad en el teorema de Bayes. El análisis Bayesiano puede ser explicado según lo establecido por Ferrer [5] a través de la siguiente aseveración:

Un investigador conduce un experimento en el que se sabe que el resultado de interés estará afectado por cualquiera de las n alternativas $B_1, B_2, \dots, B_n$ que predomine. A pesar de que no está seguro cual de todas las alternativas predominaran, posee cierta información con base en la cual está dispuesto a formular un juicio subjetivo para las probabilidades de ocurrencia de las n alternativas. De esta forma, asigna probabilidades $P(B_1), P(B_2) \dots P(B_n)$ para las n alternativas antes de obtener cualquier evidencia experimental.

Dado que estas probabilidades reflejan el juicio o grado de creencia del investigador con respecto a la ocurrencia de $B_1, B_2, \dots, B_n$, antes de que estas se presenten se conocen como probabilidad a priori. Con ello el investigador obtendrá una evidencia experimental a partir de un conjunto de datos que se denota por A , y se observa bajo una alternativa específica B_j . En este momento se pueden calcular las

probabilidades condicionales $P(A | B_j)$. Estas permitirán la determinación de la probabilidad B_j dada la evidencia experimental A , mediante el empleo del teorema de Bayes.

Las probabilidades condicionales $P(B_j | A)$, $j=1,2,3,\dots,n$ se conoce como probabilidades a posteriori porque se determina una vez obtenida la evidencia experimental. Por lo tanto, las probabilidades $P(B_j | A)$ reflejan el grado de creencia corregido con respecto a las alternativas $B_1, B_2, \dots, B_n$ después de obtener los datos experimentales.

Accidentes.

La Norma COVENIN 2260 [8] define accidente como el suceso imprevisto no deseado que interrumpe el desarrollo normal de una actividad o proceso y que tiene consecuencias en las personas, en los equipos, instalaciones y/o el ambiente. Estos son precedidos por un acto inseguro, una condición insegura o una combinación de ambos.

En un sentido más amplio, la LOPCYMAT [9], define accidente de trabajo como el suceso que produzca en el trabajador una lesión funcional o corporal, permanente o temporal, inmediata o posterior, o incluso la muerte, resultante de una acción que pueda ser determinada o sobrevenida en el curso del trabajo, por el hecho o con ocasión del trabajo.

En la medida en la que se tenga mayor información de cómo ocurrió el accidente, las causas de los mismos podrán ser determinadas con mayor precisión; es por esta razón que resulta de especial interés mencionar y describir brevemente los factores clave del accidente, los cuales se presentan en la tabla 1.

Tabla 1. Factores Clave del Accidente.

Factor clave	Definición
Agente	Objeto, sustancia o parte de la instalación que ocasionó el accidente
Parte del Agente	Sección o elemento del agente con vinculación cerrada en el accidente
Acto Inseguro	Violación, omisión o incumplimiento de una norma o práctica establecida como segura
Condición Insegura	Circunstancia relacionada con el ambiente de trabajo que permitió que ocurriera el accidente.
Factor Personal de Inseguridad	Explica el por qué ocurren actos inseguros. Está relacionado con la predisposición del individuo a la ocurrencia de accidentes, refiriéndose a la capacidad física y/o mental del individuo, entre otros aspectos.
Tipo de Accidente	Forma en la que el lesionado se puso en contacto con el objeto, sustancia o parte de la instalación que ocasionó el accidente.
Tipo de Lesión	Se refiere al daño ocasionado al trabajador accidentado, se clasifican en fracturas, heridas y quemaduras.

Fuente: González [10]

Tal como se mencionó en párrafos anteriores, en la medida en la que se tenga mayor información sobre los accidentes, será más fácil determinar las causas de los mismos, lo que permitirá la asignación de probabilidades a priori, además del establecimiento de medidas de prevención más eficaces y por ende la reducción de los índices de accidentalidad de los centros de trabajo.

Los Accidentes Como Fenómenos Estocásticos.

Un proceso estocástico es aquel en el que se representan todos y cada uno de los pasos necesarios para realizar una actividad, además de las formas o maneras en que cada uno de los pasos puede ser llevado a efecto y sus respectivas probabilidades, en este sentido, y debido a que un accidente o un acto inseguro involucran probabilidades de ocurrencia se puede determinar que los mismos forman parte de un proceso estocástico (Ferrer [5]).

Existen diversos métodos de análisis de riesgo que pueden utilizarse en la asignación de las probabilidades de ocurrencia de accidentes, a continuación se describen brevemente dos de ellos:

- **Análisis de Trabajo Seguro (ATS):** consiste en evaluar los peligros asociados a la secuencia de pasos necesaria para llevar a cabo una actividad. En primer lugar debe descomponerse la actividad en pasos y para cada paso se determinan los peligros, magnitud y medidas de prevención (Rojas [11]). En cuanto a la aplicación de la estadística bayesiana en el caso de accidentes, una vez fragmentada la actividad en pasos puede asignarse probabilidades a priori para la ocurrencia de accidentes en cada paso.
- **Análisis del Árbol de Fallas:** El portal protección civil [12] argumenta que esta técnica consiste en la selección de un evento no deseado, una vez identificado el evento, se analiza la secuencia de los sucesos que pudieran llevar a que se materialice el evento. Al igual que en la técnica anterior, una vez identificada la secuencia de sucesos, se podrá asignar las probabilidades a priori para la ocurrencia de accidentes en cada suceso.

Además de las técnicas descritas anteriormente también pueden utilizarse otras con el mismo fin de determinar las probabilidades a priori, tales como Análisis de Riesgo y Operabilidad (HAZOP), Análisis de los Modo y Efectos de las Fallas, ¿Qué pasa si?, entre otras. La asignación de estas probabilidades dependerá de la información que posee el profesional de seguridad, el conocimiento en las técnicas de análisis de riesgo, los procedimientos y cualquier otra documentación de la que se disponga.

Aplicación del Teorema de Bayes en un caso de accidente laboral.

Los accidentes no son planificados, nadie quiere que sucedan, de allí la definición de imprevistos y no deseados, esto quiere decir que ocurren por desviaciones de los procesos, dichas desviaciones pueden darse por el factor humano (actos inseguros), el ambiente de trabajo (condiciones inseguras) o la combinación de ambas cosas.

Al tener una comprensión global del trabajo que se realiza, es decir, las actividades, herramientas, instalación, sustancias de trabajo, entre otros elementos, sería posible asignar las probabilidades a priori para la ocurrencia de accidentes. En caso de que el evento no deseado ocurriera, dichas probabilidades podrían corregirse, de manera tal que se aplicaría el teorema de Bayes en el caso de un accidente laboral.

Una vez que se tenga una base de datos que contenga el registro de las probabilidades a priori y a posteriori, el beneficio que se obtendría sería el conocimiento de las causas representativas para la ocurrencia de accidente, de manera que las actividades de prevención se centrarían en las de mayor relevancia, por lo que la asignación de recursos (limitados y escasos) sería la que genere mayores beneficios, es decir, reducción de accidentes, continuidad de las operaciones, favorecimiento de la rentabilidad de la organización, fortalecimiento de la cultura de seguridad de la empresa y por ende identificación del personal con la institución, entre otros beneficios.

Lo expuesto anteriormente se sustenta además en una de las verdades o teorías fundamentales que explican el origen de los accidentes, específicamente la de los pocos críticos vitales, la cual argumenta que el 80% de los efectos (en estos casos accidentes) son generados por un 20% de causas (Rojas [11]). Resulta de interés identificar las causas correspondientes a este grupo, ya que estas serían las críticas vitales a las cuales deben dirigirse todos los esfuerzos para eliminarlas, o controlarlas, en caso de que su eliminación no sea posible.

Conclusiones

Uno de los puntos más importantes que permite la aplicación de un proceso estocástico es el análisis de datos estadísticos, debido a que permite predecir posibles resultados basándose en factores probabilísticos. Una vez realizada la revisión teórica es posible aseverar que los accidentes se comportan como fenómenos estocásticos, puesto que tienen probabilidad de ocurrencia en cualquier tiempo y de manera aleatoria.

La aplicación del teorema de Bayes en el campo de la seguridad industrial resulta de vital importancia para la toma de decisiones en cuanto a la formulación de actividades de prevención de accidentes así como la asignación de recursos para tal fin, debido a que dicho teorema es útil para determinar las causas de accidentes basándose en información estadística y probabilística, por lo que las acciones a tomar serán más eficaces.

Un aspecto a tomar en cuenta es que la asignación de probabilidades a priori dependerá de factores como la experiencia de quien asigna dichas probabilidades, la calidad de la información que se tengan para asignarla, entre otros, sin embargo una vez materializado el evento, las mismas podrán ser corregidas.

Referencias Bibliográficas.

1. Evans Michael J. y Rosenthal Jeffrey S. (2005). "Probabilidad y Estadística. La ciencia de la Incertidumbre". Editorial Reverté. Primera Edición. España.
2. Martín Francisco y Ruiz Luis (2005). "Fundamentos de Probabilidad". Editorial Thomson. Segunda Edición. España.
3. Suárez Julio (2002). "Introducción a la Teoría de la Probabilidad". Universidad Nacional de Colombia. Sede Manizales. Primera Edición. Colombia.
4. Coleman Rodney (1976). "Procesos estocásticos". Editorial Limusa. Primera Edición. México.
5. Ferrer José, V (2003). Curso de Higiene y Seguridad Industrial en instalaciones petroleras y petroquímicas. Curso para Ingenieros.
6. Çinlar, Erhan. (1995). "Introducción a los procesos estocásticos". Editorial Priece-Hall. Primera Edición. USA.
7. Canavos, George (1988). "Probabilidad y estadística". Editorial Mc Graw Hill. Primera Edición. México.
8. Norma Venezolana COVENIN 2260 (2004). "Programa de Higiene y Seguridad Ocupacional. Aspectos Generales".
9. Ley Orgánica de Prevención, Condiciones y Medio Ambiente de Trabajo. Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela N° 38236, Caracas, Venezuela, 26 de julio de 2005.
10. González Nelson (2008). Seguridad e Higiene Industrial. Principios Gerenciales. Segunda Edición. Ingeniería Integral Consultores & Asesores. Venezuela.
11. Rojas Carmen (2001). Seguridad Integral. Aplicaciones. Universidad del Zulia. Venezuela
12. Protección Civil (2015). Técnicas de Análisis de Riesgo. www.proteccioncivil.com. Visitada en agosto de 2015.

Categorización de usuarios de Twitter

Francisco Luengo, Carla Morillo y Yaskelly Yedra

Departamentos de Matemática y Computación. Universidad del Zulia. Facultad Experimental de Ciencias.
Maracaibo, Estado Zulia, Venezuela.

fluengo@fec.luz.edu.ve, carlamorillo2@hotmail.com, yyedra@fec.luz.edu.ve

Recibido: 08-12-2015.

Aceptado: 29-11-2016.

Resumen

Según estudios, se estima que el conjunto de todos los datos digitales creados, replicados y consumidos por año, pasará de 130 exabytes en 2005 a 40 zettabytes en 2020. Tan solo en la red social Twitter se publicó un promedio de 433 mil tuits por minuto durante el año 2014. Estas inmensas cantidades de datos han dado origen al surgimiento de técnicas y herramientas de análisis que han cobrado gran importancia en el ámbito de los negocios, aunque también encuentran aplicación en estudios tan diversos como los antropológicos, de seguridad nacional, seguimiento de enfermedades, entre otros. Este trabajo tiene como objetivo la implementación de técnicas para establecer categorías de usuarios de Twitter. Tales categorías quedan definidas por el comportamiento de dichos usuarios dentro de esta red social, lo cual provee un conocimiento valioso para estudios como los comentados. Adicionalmente, se presenta una breve descripción del estado del arte de las aplicaciones para análisis de tuits y sus usos, lo cual sirve de soporte a la presente investigación. El trabajo abarca conexión, captura, organización, y análisis de tuits a través de técnicas de clasificación y agrupamiento. Los resultados muestran lo efectivo de las técnicas empleadas y su potencial para resultados mas ambiciosos.

Palabras claves: Twitter, clasificación, k-means

Categorizing Twitter users

Abstract

According to some researches, it is estimated that the set of all digital data created, replicated and consumed per year, will grow from 130 exabytes in 2005 to 40 zettabytes in 2020. Only in the social network Twitter were published an average of 433,000 tweets per minute during 2014. These vast amounts of data have led to the emergence of techniques and analysis tools which have been very important in the field of business, as well as in fields so diverse like anthropology, national security, monitoring of diseases, among others. This work aims to implement techniques to establish categories of Twitter users. Those categories are defined by the behavior of the users into the social network, which provides valuable information for researches like mentioned above. Additionally, a brief description of the state of the art about applications for analysis of tweets and their uses is presented, which serves to support this research. The work covers connection, capture, organization, and analysis of tweets through classification and clustering techniques. The results show how effective the techniques used are and the potential for more ambitious results.

Key words: Twitter, classification, k-means

Introducción

El Big Data no se refiere sólo a grandes volúmenes de datos, también es el término que se emplea hoy en día para describir el conjunto de procesos, tecnologías y metodologías para tratamiento y análisis de enormes repositorios de datos, tan desproporcionadamente grandes que resulta imposible tratarlos con las herramientas de bases de datos y analíticas convencionales; y así capturar el valor que los propios datos encierran. El desafío entonces está en comprender y extraer información útil de estas fuentes de datos complejas y no estructuradas. (Eaton et al [6]) (Rui Han et al, 2015[7]).

Distintas variables son las que influyen para que la cantidad de información producida día a día a nivel mundial se multiplique constantemente. La penetración de Internet y de los dispositivos conectados es un claro ejemplo, al igual que el desarrollo de las tecnologías inalámbricas, los productos inteligentes y los negocios definidos por software. Estadísticas como las proporcionadas por Internet WorldStats (Internet World Stats [4]) y Global Web Index (Global Web Index [5]) nos dejan claro el gran poder de penetración que tiene internet dentro de las sociedades, y de igual modo las redes sociales, formando parte de nuestro estilo de vida y ofreciendo una fuente inagotable de información en cuyo contenido reposa latente un conocimiento que espera ser descubierto.

Este trabajo se enfoca en la red social Twitter (HaewoonKwak et al [8]), y en las técnicas para capturar, organizar y analizar la información que fluye por ella, con el propósito de poder clasificar grupos de sus usuarios según el comportamiento que estos exhiban dentro de la misma.

Fundamentos Teóricos

Siempre que hagamos una búsqueda en internet, enviemos un email, usemos un teléfono móvil, actualicemos una red social, usemos una tarjeta de crédito, activemos el GPS, juguemos en-línea o hagamos la compra en el supermercado dejamos detrás de nosotros una montaña de datos, huellas digitales y registros que ofrecen una información valiosa y cuyo estudio es del interés de muchos.

En un trabajo realizado por Martin Hilbert y Priscila López [1], los investigadores estimaron que en el período comprendido entre 1986 al 2007, la humanidad había generado 2×10^{21} bytes en comunicaciones, y almacenado 2.9×10^{20} bytes. De acuerdo con Hilbert y López [1], el 75% de la información almacenada en el mundo aún estaba en formato analógico en el año 2000, en su mayoría en forma de cintas de video, y para el año 2007 el 94% de información del mundo ya era digital.

Por otro lado, en su 6to estudio sobre el Universo Digital presentado por IDC y patrocinado por EMC Corporation, llamado “THE DIGITAL UNIVERSE IN 2020: Big Data, Bigger Digital Shadows, and Biggest Growth in the Far East” (EMC Corporation [2]), IDC nos dice que la mayoría de la información en el universo digital, 68% en 2012, fue creada y consumida por los propios usuarios (al ver televisión digital, interactuando en redes sociales, enviando fotografías y video entre dispositivos o internet, etc) y de la cual, solamente una pequeña fracción ha sido explorada con propósitos de análisis.

Para darnos una mejor idea nos referimos a los resultados obtenidos por la aplicación Qmee [3], la cual reporta que durante cada minuto del año 2014 se realizaron en promedio 293 mil actualizaciones de estatus en Facebook, se subieron 67 mil fotos a Instagram, visto más de 5 millones de videos en YouTube, y publicado 433 mil tuits.

De lo anterior puede decirse que las redes sociales, como plataforma para las publicaciones digitales, representan por sí mismas un mini universo digital con los mismos retos del Big Data (capturar, descubrir, y analizar), y han sido los investigadores en el campo de las Tecnologías de la Información (TI) uno de los primeros en reconocer su riqueza; de allí surge el término Inteligencia de Negocios (Business Intelligence), refiriéndose a la habilidad para transformar los datos en información, y la información en conocimiento, de forma que se pueda optimizar el proceso de toma de decisiones en los negocios y crear ventajas competitivas. (Stefano Rizzi [9]) (Mihaela Muntean [10])

Hoy en día, esas ventajas están enfocadas hacia el SEO (de sus siglas en inglés, Search Engine

Optimization, referidos al conjunto de técnicas para el posicionamiento dentro de buscadores), o mas ampliamente, hacia el SEM (del inglés, Search Engine Marketing, refiriéndose a las técnicas para promover las páginas web). Dando origen al surgimiento de lo que se denomina SMA (Social Media Analytics), es decir, el conjunto de herramientas destinadas a conocer las opiniones, sentimientos, tendencias y preferencias de los usuarios de las redes sociales. (Ribarsky et al [11]) (ChristophBoden [12]) (Kent, P [14]).

Si bien estas herramientas de análisis son mas conocidas por su importancia en el ámbito de los negocios, sus técnicas también son aplicadas a un amplio espectro de problemas que incluyen estudios antropológicos, asuntos de seguridad nacional, análisis de propagación de enfermedades, entre muchos otros (Dror Y et al [13]) (Moore, M.T [15]) Haibin Liu [16]) (Liu and Dongwon [17]).

En este sentido, son muchas las aplicaciones que han surgido, específicamente orientadas a localizar o definir perfiles de individuos o entidades, dentro de las redes sociales, así como su impacto, influencia y reputación online, es decir, su marca digital. Tres ejemplos de algunas de ellas son:

True Social Metrics [18], permite medir comentarios por post, shares por post, contenido favorito, tasa de conversación, tasa de amplificación, tasa de aplausos y valor económico de las principales redes sociales como Twitter, Facebook, Google+, YouTube, LinkedIn, Instagram, etc.

Sentimentalytics [19], es una herramienta que funciona en tiempo real y multiidioma, muestra el sentimiento que desprende una publicación o tweets, además analiza menciones, mensajes temas y usuarios.

Semrush [20], es una de las herramientas más importante para el análisis de la competencia. Con ella se puede analizar el SEO y SEM de empresas de la competencia.

Todas estas herramientas se apoyan en técnicas de minería de datos; sin embargo, la tendencia actual es combinarlas con otras técnicas como las proporcionadas por la minería de textos, para mejorar la calidad de los resultados. Algunas herramientas que emplean estas técnicas son:

WordStat [21], se utiliza para realizar análisis de competencia en sitios web, análisis de sentimientos y contenido en preguntas abiertas. Permite realizar categorización, clasificación mediante Naïve-Bayes o el algoritmo de vecindad (con palabras o conceptos), análisis de correspondencia y relacionar textos no estructurados con datos estructurados (previamente conocidos) entre otras utilidades.

Attensity [22], análisis y minería de texto se utiliza para analizar la información y la inteligencia colectiva en redes sociales y foros.

Las herramientas de análisis de la diversidad léxica, minería de opiniones, análisis de los sentimientos o mapas de conexiones semánticas entre usuarios son solo algunos de los desarrollos que han proliferado dentro de las técnicas de búsqueda de información en las redes sociales. Son herramientas y técnicas imprescindibles en el época de Big Data, si queremos tener la más mínima posibilidad de ser capaces procesar/analizar los altos volúmenes de información actual.

Parte Experimental

Esta investigación abarcó cuatro fases: conexión, captura, organización y análisis. Para lograr las tres primeras se desarrolló una aplicación que permite la conexión con Twitter, capturar tuits de usuarios determinados y estructurarlos en una base de datos para facilitar su posterior análisis. Para la última fase se implementaron en la aplicación técnicas de clasificación, agrupamiento, y probabilísticas, que facilitaron la interpretación de los resultados.

Resultados y Discusión

La Aplicación

Para esta investigación se desarrolló una aplicación, llamada TuitCLUS; con el propósito de cubrir las tres primeras fases del proyecto y facilitar la cuarta.

TuitCLUS fue desarrollado en el lenguaje de programación Java bajo el entorno de desarrollo de Eclipse Juno, empleando la librería Twitter4J[25] para el acceso, autenticación, autorización y uso de los datos proporcionados por la red social Twitter. Para la organización y almacenamiento de los tuits se utilizó el manejador de base de datos MySQL.

Si bien, Twitter4J no es una librería oficial para la API (Application Programming Interface) de esta red social, ella puede ser integrada a cualquier aplicación de Java junto con el servicio de Twitter. Esta librería está disponible para los desarrolladores con las siguientes características (Twitter4J [25]): librería funcional para la plataforma Java versión 5 o posterior, brinda soporte a las plataformas de Android y Google App Engine, no posee dependencia (es decir, no requiere de algún archivo, aplicación o herramienta adicional), posee soporte integrado con OAuth, es compatible en un 100% con la API de Twitter v1.1, e incluye software de JSON.org para analizar respuestas en formato JSON de la API de Twitter.

Todos los pasos llevados a cabo por TuitCLUS se resume en la siguiente figura.



Figura 1. Secuencia de procesamiento de TuitCLUS

A continuación se describen cada una de las fases implementadas.

Conexión

La plataforma de Twitter provee a los desarrolladores e investigadores una amplia documentación sobre las diversas APIs, herramientas, kits de desarrollo, soluciones y muchísima información referente a esta red social (Twitter Documentation [23]).

Todas las APIs de Twitter están basadas en el protocolo HTTP. Esto quiere decir que cualquier software que las use envía una serie de mensajes (solicitudes) estructurados a los servidores de Twitter. Sin embargo, para que dichas solicitudes puedan ser efectivamente procesadas por los servidores de Twitter, éstas deben proveer la siguiente información: qué aplicación hace la solicitud, nombre del usuario que hace la solicitud, si el usuario ha otorgado permiso a la aplicación para realizar la solicitud, y si la solicitud fue alterada por un tercero mientras estuvo en tránsito. Para permitir a las aplicaciones proporcionar esta información, Twitter se basa en el protocolo de autenticación OAuth [24].

Para el desarrollo de TuitCLUS fue necesario registrar la aplicación en la dirección web apps.twitter.com/app/new asociarla a una cuenta Twitter creada para tal fin. Bajo esta modalidad, Twitter provee a los desarrolladores las credenciales y claves de acceso para establecer conexiones a los recursos de sus APIs. Estas credenciales son secretas y sólo debe conocerlas el desarrollador de la aplicación, ya que

estas identifican las solicitudes que recibe la API de Twitter con la aplicación que las está haciendo.

Una vez obtenidos los códigos de autorización y autenticación (ConsumerKey, ConsumerSecret, AccessToken, y el AccessTokenSecret), se establecieron como una constante en la aplicación, haciendo uso de la clase “ConfigurationBuilder” definida por la librería Twitter4J, tal como se muestra a continuación:

```
private final ConfigurationBuilder cb;  
cb = new ConfigurationBuilder();  
cb.setOAuthConsumerKey(“***Aquí el ConsumerKey***”);  
cb.setOAuthConsumerSecret(“***Aquí el ConsumerSecret***”);  
cb.setOAuthAccessToken(“***Aquí el AccessToken***”);  
cb.setOAuthAccessTokenSecret(“***Aquí el AccessTokenSecret***”);
```

Con esta información de autenticación, ya se está listo para ejecutar consultas a los servidores de Twitter.

Captura

El objetivo ahora es tener acceso a la información pública de usuarios de Twitter, para lo cual esta red social proporciona básicamente dos APIs: REST API y Streaming API.

La REST (RepresentationalState Transfer) API proporciona acceso programático a leer timeline, twitear y seguir a usuarios. La Streaming API le da a los desarrolladores una baja latencia de acceso a la corriente mundial de los datos de los tuits de Twitter.

Una misma aplicación puede emplear ambas APIs de requerirlas; sin embargo, para los propósitos de esta investigación solo se requirió los servicios de la REST API, los cuales fueron solicitados a través de los métodos proporcionados por Twitter4J.

Ahora bien, lo primero es agregar aquellas cuentas de las que se desea descargar información, y para ello, lo principal fue llevar a cabo la validación de dichas cuentas, conocer si existen o no, si son privadas o públicas. El siguiente código proporciona dicha información:

```
String cuentaTwitter;  
User usuario=twitter.showUser(cuentaTwitter);  
usuario.isProtected();  
usuario.getStatus();
```

Una vez verificada la cuenta, se descarga su timeline; es decir, los tuits que haya publicado, funcionando las interfaces Twitter y Status de Twitter4J:

```
List<Status> statuses;  
statuses = twitter.getUserTimeline(cuentaTwitter);
```

Organización

Ya teniendo el timeline en `statuses`, los métodos de la clase `Status` dan acceso a los distintos componentes de un tuit: ID del usuario asignado por Twitter, nombre de usuario, descripción del usuario, la imagen de usuario, cantidad de seguidores, cantidad de amigos o seguidos, los hashtags utilizados, idioma, localización, el texto del tuit, cantidad de retweets del tuit, cantidad de favoritos del tuit, si se

realizaron menciones en el tuit, si es un retweet o no, si es una cuenta verificada o no.

La Figura 2 muestra la estructura de la base de datos creada para relacionar toda la información de los tuits de los usuarios.

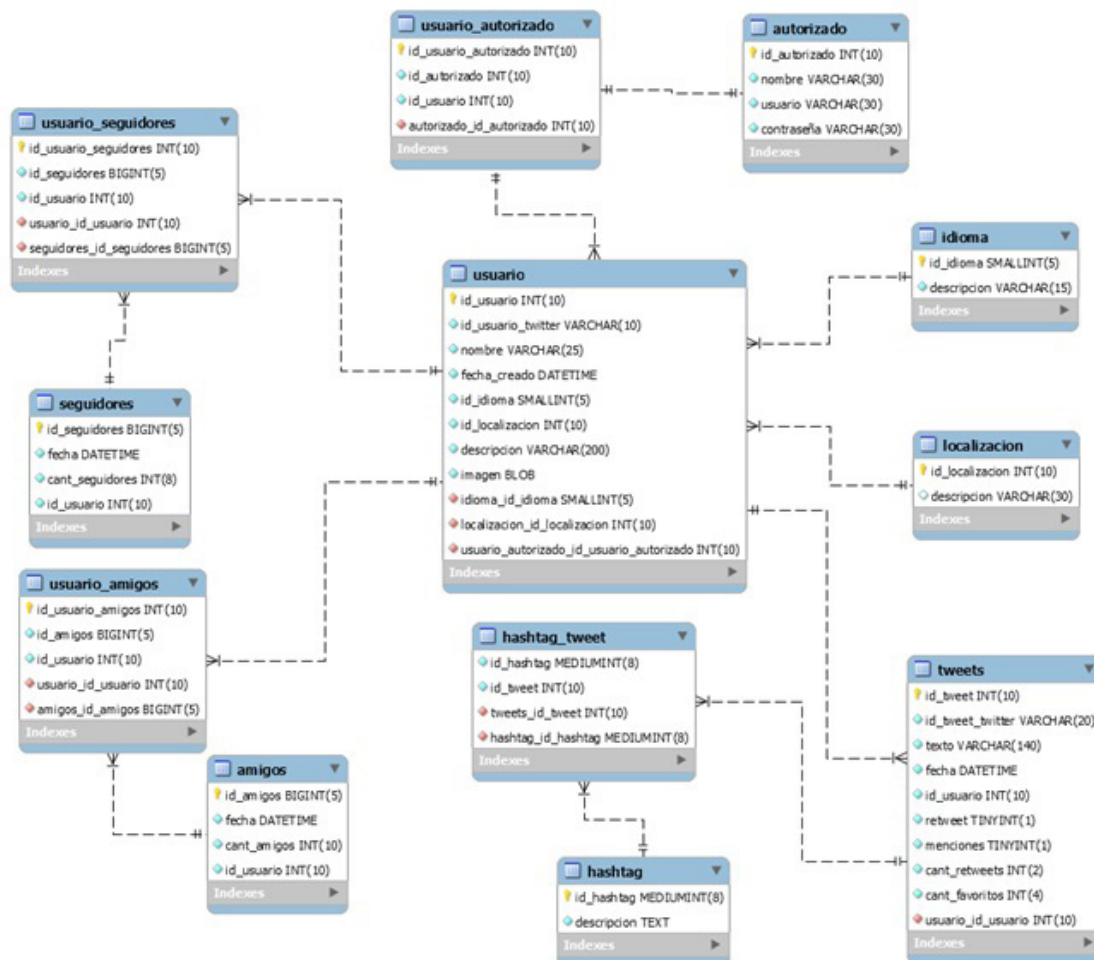


Figura 2. Base de Datos de TuitCLUS

Análisis

Finalmente, para establecer categorías de usuarios se consiguen similitudes entre las cuentas empleando técnicas de clasificación k-means (Berkhin [26]) y probabilísticas naive-bayes (Frank et al [27]), de manera que cada grupo formado represente una categoría.

Para aplicar el k-means se definió un vector característico asociado a cada cuenta. Los componentes de dicho vector corresponden a cuantificadores asociados al comportamiento de la cuenta, tales como: total de tuits, cantidad de retuits que hace y que le hacen, frecuencia y promedio de tuiteo, frecuencia y promedio con la que es retuiteado y con la que retuitea, cantidad de seguidos y seguidores, tasas de crecimiento de seguidores y seguidos, nivel de impacto de los tuits, tiempo de creación de la cuenta, si la cuenta es certificada o no, etc. De estos atributos se construye el vector característico para cada cuenta y se generan los centroides que definirán los grupos o categorías finales.

La siguiente sección describe en mas detalle los resultados mencionados.

Pruebas y Resultados

Para el momento de las pruebas se contó con alrededor de 1.061.457 tuits correspondientes a 108 cuentas de usuarios, descargados en el período de julio a octubre de 2015.

Inicialmente se realizaron varias pruebas utilizando solo dos atributos asociados a las cuentas de usuarios, para definir sus vectores característicos. La Tabla 1 muestra los resultados de aplicar el k-means para dos características a la vez, sobre 50 cuentas. Para cada par de características se buscó establecer 5, 4, 3 y 2 grupos de usuarios, respectivamente.

Al usar solo dos características es más fácil notar la relación entre las cuentas que terminan asociadas a cada grupo formado, además de poder visualizar los centroides finales en relación a la distribución espacial de los vectores característicos (ver Fig. 3). Esta información ayuda a definir comportamientos claves para categorizar usuarios, los cuales pueden traducirse en condiciones específicas que los definen.

Tabla 1. Cantidad total de cuentas asociadas a cada grupo según características.

	Prom. de Tuiteo y %Tuits Propios	Total Tuits y % Tuits Propios	%Retuits y % Tuits Propios	Tasa Seguidores y TasaSeguidos
5 Grupos	[22, 2, 13, 9, 4]	[29, 10, 5, 3, 3]	[6, 19, 5, 20, 0]	[41, 1, 1, 6, 1]
4 Grupos	[23, 2, 23, 2]	[9, 25, 6, 10]	[14, 14, 11, 11]	[5, 5, 38, 2]
3 Grupos	[3, 38, 9]	[29, 2, 19]	[13, 25, 12]	[10, 37, 3]
2 Grupos	[23, 27]	[27, 23]	[12, 38]	[45, 5]

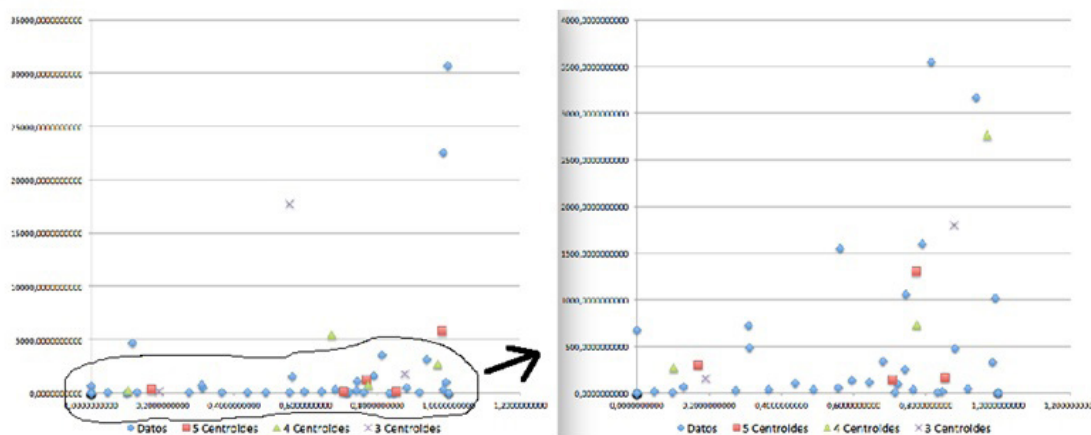


Figura 3. Distribución de los vectores característicos y de los centroides finales, considerando el porcentaje de tuits propios y el total de tuits hechos.

En otra prueba, se aplicó el k-means con el propósito de definir cinco (5) grupos entre 106 cuentas de usuario, para lo cual se consideraron los siguientes atributos para el vector característico: cantidad de retuits recibidos, frecuencia de tuiteo, tasa de seguidores, tasa de seguidos, y porcentaje de retuits que hace. La Tabla 2 muestra los resultados de aplicar el método desde dos grupos de centroides distintos; en el primero los centroides están distribuidos uniformemente en el espacio de cuentas, mientras que para el segundo grupo se empleó la base canónica (utilizando el máximo valor que alcanza cada atributo para formar su respectivo vector) para el espacio 5-dimensional.

Tabla 2. Distribución de cuentas resultante para dos tipos distintos de centroides iniciales.

Centroides iniciales uniformemente distribuidos	[Grupo 1]--> cantidad de cuentas asociadas= 23 [Grupo 2]--> cantidad de cuentas asociadas= 45 [Grupo 3]--> cantidad de cuentas asociadas= 18 [Grupo 4]--> cantidad de cuentas asociadas= 10 [Grupo 5]--> cantidad de cuentas asociadas= 4
Centroides iniciales formando base canónica	[Grupo 1]--> cantidad de cuentas asociadas= 14 [Grupo 2]--> cantidad de cuentas asociadas= 13 [Grupo 3]--> cantidad de cuentas asociadas= 14 [Grupo 4]--> cantidad de cuentas asociadas= 6 [Grupo 5]--> cantidad de cuentas asociadas= 53

Si bien la distribución de cuentas por grupo es parecida, en lo que respecta a cantidades, no resulto de esa manera en cuanto a las cuentas de usuario en sí. Las cuentas pertenecientes a los grupos derivados de los resultados originados por los centroides iniciales canónicos fueron mas parecidas entre ellas; o sea, que compartieron mas características. De hecho, como resultado de estos centroides iniciales se formaron grupos entre los que destacaban cuentas dedicadas a la transmisión de noticias, de cuentas inactivas, o de cuentas activas en tuiteo, muy retuiteadas y de rápido crecimiento.

Estudios previos han establecido lo sensible del k-means a la solución inicial (ver [28]), lo cual era de esperarse por la forma de trabajar del método, y mas aún por la forma de dispersión de las cuentas en el espacio, lo que explica las diferencias en la distribución de cuentas en ambos resultados.

Para dar mayor confiabilidad a los resultados, se determinó un promedio del grado de pertenencia de cada cuenta a el grupo al que fue asignado con el naive-bayes, lo que confirmó el resultado alcanzado por los centroides iniciales canónicos como el más efectivo en la identificación de cuentas con comportamientos similares.

Conclusiones

La presencia cada vez mayor de las redes sociales y las muchas formas en las que permiten expresar nuestras opiniones, gustos y sentimientos, aumenta la atención sobre ellas como fuente de información para una amplia variedad de investigaciones.

Uno de los estudios mas comunes realizados para Twitter es la determinación de tendencias; de qué habla la gente. Pero también existe interés por clasificar las cuentas de usuarios según su comportamiento dentro de la red, nivel de influencia, alcance, si son autenticas o no, entre otras características; para lo cual se suelen establecer criterios basados en un par de características de las cuentas.

El k-means es una técnica sencilla de implementar, y tomando las consideraciones adecuadas resulta efectiva, no solo en la clasificación de usuarios de Twitter según criterios establecidos, sino también en la determinación de las características mas relevantes que permiten categorizar sus comportamientos dentro de la red. Entre los aspectos a considerar destaca el hecho de que el método es sensible a la configuración inicial de los centroides; sin embargo, el uso de una base canónica arrojó buenos resultados. Además, combinando con otras técnicas como naive-bayes, o alguna métrica, se puede cuantificar la calidad de la solución obtenida, proporcionando una medida de confiabilidad.

Por otra parte, las técnicas de minería de texto aumenta su importancia en el estudio de este tipo de redes sociales, donde análisis de sentimiento, análisis semántico, etc, son herramientas cada vez mas empleadas; sin embargo, sus resultados son posibles de cuantificar e incluir como atributos de vectores característicos que son con los que trabaja el método.

Referencias Bibliográficas

1. Martin Hilbert, Priscila López. "The World's Technological Capacity to Store, Communicate, and Compute Information". *Science*. Vol. 332 no. 6025 pp. 60-65. Abril 2011.
2. EMC Corporation. <http://www.emc.com/leadership/digital-universe/index.htm>. "THE DIGITAL UNIVERSE IN 2020: Big Data, Bigger Digital Shadows, and Biggest Growth in the Far East". Diciembre 2012.
3. Qmee. "Lo que sucede en línea en 60 segundos". <http://blog.qmee.com/online-in-60-seconds-info-graphic-a-year-later/>
4. Internet World Stats. <http://www.internetworldstats.com/>
5. Global Web Index. <https://www.globalwebindex.net/>
6. Eaton, C., Deroos, D., Deutsch, T., Lapis, G., Zikopoulos, P. "Understanding Big Data: Analytics for Enterprise Class Hadoop and Streaming data." McGraw-Hill. 2012.
7. Rui Han, Zhen Jia, Wanling Gao, Xinhui Tian, and Lei Wang. "Benchmarking Big Data Systems: State-of-the-Art and Future Directions". TECHNICAL REPORT. ICT, ACS. 4 Jan 2015.
8. Haewoon Kwak, Changhyun Lee, Hosung Park, and Sue Moon. "What is Twitter, a social network or a news media?". *Proceedings of the 19th International Conference on World Wide Web*. Pp 591-600. 2010.
9. Stefano Rizzi. "New Frontiers in Business Intelligence: Distribution and Personalization". *ADBIS 2010, LNCS 6295*, pp. 23–30, 2010.
10. Mihaela Muntean. "Theory and Practice in Business Intelligence". MPRA Paper No. 41359, posted 16. September 2012.
11. William Ribarsky, Xiaoyu Wang, and Wenwen Dou. "Social Media Analytics for Competitive Advantage". *EuroVis Workshop on Visual Analytics (2013)*, pp. 1–5. 2013.
12. Christoph Boden, Volker Markl, Tu Berlin, Marcel Karnstedt, and Miriam Fernandez. "Large-Scale Social-Media Analytics on Stratosphere". *International World Wide Web Conference Committee (IW3C2)*, pp 257-260. 2013
13. Dror Y. Kenett, Fred Morstatter, H. Eugene Stanley, Huan Liu. "Discovering Social Events through Online Attention". *PLoS ONE* 9(7). 2014.
14. Kent, P. "Viewpoint: Big data and big analytics means better business", *BBC News*, Oct 2012, <http://www.bbc.co.uk/news/business-19969588>
15. Moore, M.T. "Twitter index tracks sentiment on Obama, Romney", *USA Today*, Jan 2012, <http://usatoday30.usatoday.com/news/politics/story/2012-08-01/twitter-political-index/56649678/1>
16. Haibin Liu. "EXPLOITING USER-GENERATED DATA FOR KNOWLEDGE DISCOVERY AND RECOMMENDATION". *Dissertation in Information Sciences and Technology for the Degree of Doctor of Philosophy. The Pennsylvania State University*. August 2014.
17. Haibin Liu and Dongwon Lee. "Quantifying Political Legitimacy from Twitter". *LNCS 8393*, pp. 108–115, 2014.
18. True Social Metrics. <https://www.truesocialmetrics.com>
19. Sentimentalytics. <https://sentimentalytics.com/>
20. SEMrush. *Competitive Data*. <http://www.semrush.com/>

21. WordStat. <http://provalisresearch.com/>
22. Attensity. <http://www.attensity.com>
23. Twitter Documentation. <https://dev.twitter.com/overview/documentation>
24. OAuth. <http://oauth.net>
25. Twitter4J. <http://twitter4j.org/en/index.html>
26. P. Berkhin. "A Survey of Clustering Data Mining Techniques". Chapter of Grouping Multidimensional Data, pp 25-71. Springer Berlin Heidelberg. 2006.
27. Eibe Frank, Mark Hall, and Bernhard Pfahringer. "Locally Weighted Naive Bayes". Proceedings of the Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, pp 249-256. 2003.
28. Villagra, A., Guzmán, A., Pandolfi, D. y Leguizamón, G. "Análisis de medidas no-supervisadas de calidad en clusters obtenidos por K-means y ParticleSwarmOptimization". Trabajo presentado en el Congreso de Inteligencia Computacional Aplicada (CICA), realizado en Buenos Aires del 23 al 24 de julio de 2009.

Uso del Wxmaxima en la enseñanza de la ecuación integral de Fredholm de segunda especie

Jhonny Araque, Robert Quintero y Oscar León

Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería. Universidad del Zulia. Maracaibo, Estado Zulia, Venezuela
jhonnysaraque@gmail.com; robertqui@gmail.com; osluleongo93@gmail.com

Recibido: 02-02-2016.

Aceptado: 29-11-2016.

Resumen

En este artículo se presenta el uso del paquete programable Wxmaxima como herramienta didáctica para la resolución de la ecuación integral de Fredholm de segunda especie. El paquete permite, mediante el desarrollo de Taylor de dos variables, aproximar el núcleo $k(x,t)$ de la ecuación integral por un núcleo degenerado y, de esta manera, obtener la solución de forma algebraica. Se presentan algunos ejemplos en los cuales compara la solución obtenida usando Wxmaxima con la solución exacta y con la solución hallada mediante otros programas computacionales.

Palabras clave: Ecuación integral de Fredholm, núcleo degenerado, Wxmaxima.

Use of Wxmaxima on teaching the Fredholm integral equation of second order

Abstract

In this paper the use of a programmable package Wxmaxima is presented as a teaching tool for the solution of the Fredholm integral equation of second order. The package allows to find an approximation of the core $k(x,t)$ of the integral equation by a degenerate core and by this way to find the solution algebraically. Also, it is presented several examples by comparison between the solution through Wxmaxima with the exact solution and with others computer programs.

Keywords: Fredholm integral equation, degenerate core, Wxmaxima.

Introducción

Durante las últimas décadas, el uso de las computadoras ha permitido a los profesionales de la ingeniería usar paquetes programables para evaluar diseños y elevar su desempeño en la toma de decisiones. En la enseñanza de la ingeniería, se usan algunos paquetes programables como el Matlab, el Maple, entre otros, para que el estudiante pueda empezar a razonar sobre los modelos del cálculo. En este trabajo presentamos el Wxmaxima (software libre, versión 11.08) como una alternativa a los dos paquetes men-

cionados anteriormente, específicamente para hallar la solución aproximada de la ecuación de Fredholm de segunda clase. Dicho paquete permite encontrar por desarrollo de Taylor un núcleo aproximado al núcleo original de la ecuación integral, además aporta las soluciones del sistema de ecuaciones lineales que se forma y que representan los coeficientes del polinomio de dicha aproximación. En Ortigoza [1] se expone el proceso para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, utilizando el Wxmaxima. Robert Corless [2] se plantea la solución aproximada de ecuaciones integrales de Fredholm utilizando Maple. Constantino Molina [3] emplea una rutina de lenguaje Pascal para encontrar una solución aproximada a ecuaciones integrales de Fredholm. Solo, que tanto Maple como Pascal muestran al final los valores de puntos encontrados. Con el Wxmaxima, podemos construir la solución aproximada paso a paso y el estudiante puede ver a través de la interfaz gráfica lo que está ocurriendo. Según Depool [4, Pág. 3], en la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral el uso de una secuencia de instrucciones es decisivo para el logro de los objetivos de enseñanza y aprendizaje. Según Ipanaque [5] el Wxmaxima, es un sistema de álgebra computacional, establecido como un motor de cálculo simbólico y escrito en lenguaje LISP, publicado bajo licencia GNU GPL. Es de hacer notar que está fundamentado en Macsyma, el cual fue desarrollado por MIT en los años 70. No desperdicia memoria ya que posee un buen recolector de basura, sin embargo es recomendable colocar al principio de cada fichero la instrucción “kill (all)”, para limpiar memoria. Tiene un modo consola y una interfaz gráfica. Está escrito en COMMON LISP lo cual permite el acceso a programación.

Elementos de Wxmaxima, para integrales, serie de Taylor y sistemas de ecuaciones lineales.

Se utilizan los comandos integrate, taylor, linsolve,

Para obtener una integración de funciones definida, se utiliza:

Comando “integrate”

integrate (expr, x, a, b);

expr es la función a evaluar, x es la variable, a y b son los límites de la integración. Colocar putno y coma al final de cada orden.

Comando “taylor”

taylor (expr, [x_1,a,n],[x_2,a, n])

expr es la función a utilizar, x-1, x-2, ..., x-n son las variables que tiene la función, a es el punto de la evaluación, n es el número de términos de la serie.

Comando “expand”

expand(%), lo cual se refiere a expandir la expresión de la salida anterior, usa el símbolo %.

comando “linsolve”

linsolve ([expr_1, ..., expr_m], [x_1, ..., x_n])

donde [expr_1, ..., expr_m] son todas las ecuaciones del sistema y [x_1, ..., x_n] son las variables de cada una de las ecuaciones.

Fundamentos Teóricos

Tomemos la ecuación de Fredholm.

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (1)$$

Según Kamwal [6, Pág 8-9], el núcleo $k(x,t)$ puede escribirse como $k(x,t) = \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t)$

Así,

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \right] \varphi(t) dt = f(x) \quad (2)$$

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \int_a^b b_k(t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (3)$$

Llamemos $C_k = \int_a^b b_k(t) \varphi(t) dt$, donde $k = 1, 2, \dots, n$.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) C_k \quad (4)$$

Al sustituir (4) en (2)

$$\sum_{k=1}^n a_k(x) C_k - \int_a^b dt = 0$$

Luego,

$$\sum_{m=1}^n \left\{ C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(t) \right] dt \right\} a_m(x) = 0$$

De la independencia lineal de las funciones $a_m(x)$ con $m = 1, 2, \dots, n$, se deduce que

$$C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(t) \right] dt = 0$$

y

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^n C_k \int_a^b b_m(t) a_k(t) dt = \int_a^b b_m(t) f(t) dt$$

con

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt$$

y

$$f_m = \int_a^b b_m(t) f(t) dt$$

entonces, usando las notaciones

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^n a_{km} C_k = f_m \quad (5)$$

Acotamos

$$\varphi(x) - \hat{\varphi}(x) < 0.0014$$

Hacemos el cálculo de las diferencias

x	$ x - \hat{f}(x) $
0.1	3.2×10^{-8}
0.2	2.4×10^{-7}
0.3	7.5×10^{-7}
0.4	1.6×10^{-6}
0.5	2.8×10^{-6}
0.6	4.7×10^{-6}
0.7	8.3×10^{-6}
0.8	1.5×10^{-5}
0.9	3.1×10^{-5}
1	6.4×10^{-5}

Resolviendo ejemplo 1 utilizando la interfaz gráfica de Wxmaxima. Observe la gráfica 2

```

(%i1) k(x,t):=x*(1-cos(x*t^2));
(%o1) k(x,t):=x(1-cos(x t^2))

(%i2) taylor(k(x,t),[x,0,15],[t,0,15]);
(%o2) /T/ (t^4+...) x^3 + (t^8+...) x^5 + (t^12+...) x^7 +...

(%i3) expand(%);
(%o3) t^12 x^7 / 720 + t^8 x^5 / 24 + t^4 x^3 / 2

(%i8) b1(t):=coeff(%o3,x,3);b2(t):=coeff(%o3,x,5);
(%o8) b1(t):=coeff(%o3,x,3)
(%o9) b2(t):=coeff(%o3,x,5)

(%i10) fi(t):=t/2+1/2*sin(t)+c1*t^3+c2*t^5;
(%o10) fi(t):=t/2+1/2 sin(t)+c1 t^3+c2 t^5

(%i11) linsolve({c1=integrate(b1(t)*fi(t),t,0,1), c2=integrate(b2(t)*fi(t),t,0,1)}, [c1,c2]), bfloat);
(%o11) [c1=8.332899060859618b-2, c2=-4.166397203415567b-3]

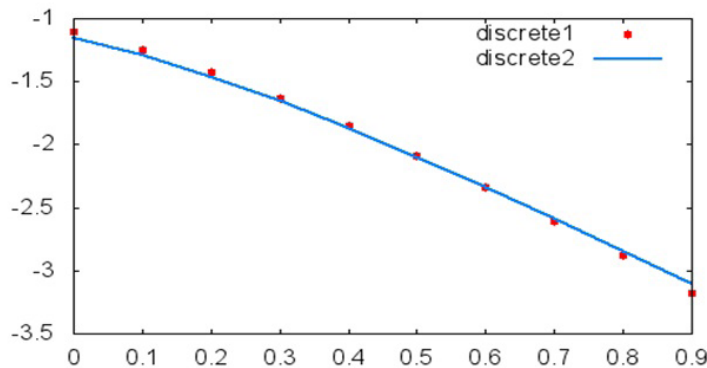
(%i12) fi(x):=x/2+1/2*sin(x)+0.0833*x^3-0.0041*x^5;
(%o12) fi(x):=x/2+1/2 sin(x)+0.0833 x^3+(-0.0041) x^5
  
```

Gráfica 2

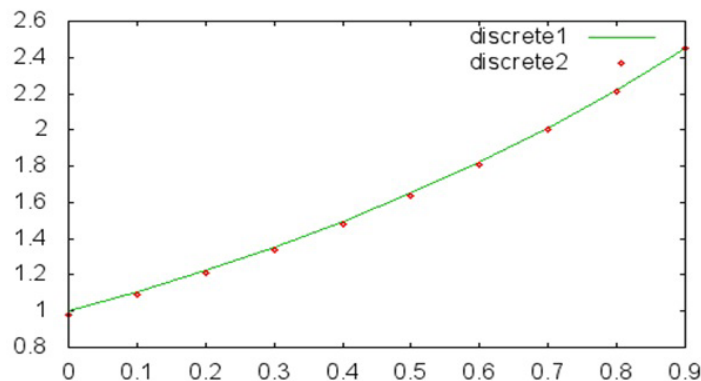
Ejemplo 2

Resolver la ecuación integral $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^1 e^{xy} \varphi(y) dy$, la cual aparece en [2], donde la solución presentada es $\text{discrete1} = [0, -1.10], [0.1, -1.25], [0.2, -1.43], [0.3, -1.63], [0.4, -1.85], [0.5, -2.09], [0.6, -2.34], [0.7, -2.61], [0.8, -2.88], [0.9, -3.18]$, estos resultados se obtuvieron con el método de colocación usando MAPLE.

Al resolver la misma ecuación con Wxmaxima se obtiene $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2.154 - 1.26x - 0.455x^2$. La diferencia absoluta entre las dos aproximaciones es: $[[0, 0.054], [0.0, 0.04505099009901], [0.0, 0.033861538461539], [0.0, 0.02731880733945], [0.0, 0.021131034482758], [0.0, 0.01075], [0.0, 0.0021058823529412], [0.0, 0.017990939597315], [0.0, 0.031756097560976], [0.0, 0.070536187845304]]$, véase la gráfica 3

**Gráfica 3****Ejemplo 3**

Al resolver la ecuación integral $\varphi(x) = e^x + e^{-x-2} - \int_0^1 e^{-x-y-2} \varphi(y) dy$, que se encuentra en [3] y se resolvió utilizando una rutina de programación en PASCAL, se obtuvieron los puntos, identificado con $\text{discrete1} = [0, 0.98], [0.1, 1.09], [0.2, 1.21], [0.3, 1.34], [0.4, 1.48], [0.5, 1.64], [0.6, 1.81], [0.7, 2.00], [0.8, 2.21], [0.9, 2.45]$, y el error esperado es de 0,025 respecto de la solución exacta. La solución aproximada hallada con Wxmaxima mantiene un error esperado por debajo de 0,008

**Gráfica 4**

La forma instruccional para la interacción del ejercicio anterior con la interfaz gráfica de Wxmaxima está indicada con punto de viñeta y es como sigue:

- Se define el nucleo de la ecuación integral y la función $f(x)$ como $f(t)$
 $k(x,t):=-\exp(-x-t-2); f(t):=\exp(t)+\exp(-t-2);$
- Se indica el número de términos para el desarrollo de Taylor
 $n:4;$
 $\text{expand}(\text{taylor}(k(x,t),[x,0,n],[t,0,n]));$
- Se ubican los coeficientes para las potencias de x $b1(t):=\text{coeff}(\%o4,x,0); b2(t):=\text{coeff}(\%o4,x,1); b3(t):=\text{coeff}(\%o4,x,2);$
- Se reescribe la función $fi(t)$
 $fi(t):=f(t)+c1+c2*t+c3*t^2;$
- Se resuelve el sistema de ecuaciones integrales
 $\text{linsolve}([c1=\text{integrate}(b1(t)*fi(t),t,0,1), c2=\text{integrate}(b2(t)*fi(t),t,0,1), c3=\text{integrate}(b3(t)*fi(t),t,0,1)], [c1,c2,c3]), \text{bfloat};$
- Se devuelve el cambio de $fi(t)$ para $fi(x)$ y se grafica contra la exacta
 $fi(x):=\exp(x)+\exp(-x-2)-0.13+0.13*x-0.067*x^2; \text{wxplot2d}([fi(x),\exp(x)], [x,0,1])\$$
- Se hacen las listas de puntos en PASCAL y se grafican contra los puntos Wxmaxima
 $\text{mapP}:[[0,0.98], [0.1,1.09], [0.2,1.21], [0.3,1.34], [0.4,1.48], [0.5,1.64], [0.6,1.81], [0.7,2.00], [0.8,2.21], [0.9,2.45]]; \text{pW}:\text{create_list}([x,fi(x)],x,[0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9]),\text{number}; \text{wxplot2d}([[discrete,pW],[discrete,pP]],[style,[lines,1,3],[points,1,2]]);$
- Se halla la lista de los errores de la solución aproximada Wxmaxima contra la exacta
 $\text{makelist}(\text{abs}(fi(x)-\exp(x)),x,[0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9]),\text{number};$
- Por último, mostramos el ejemplo 4, resuelto con programación en Octave (versión libre de MATLAB). Hacemos la comparación con los coeficientes obtenidos en Octave y los obtenidos con Wxmaxima. Este ejercicio se encuentra en Kiseliov, 304 ver [7]

Ejemplo 4

Al resolver utilizando el programador Octave (Matlab) para la ecuación $\varphi(x) = \frac{1}{2}(e^x + 3x - 1) + \int_0^1 x(e^{-xt^2} - 1)\varphi(t)dt$, se obtienen los coeficientes $c_1 = -0.2499$ y $c_2 = 0.0677$. Usando Wxmaxima se obtienen

$c_1 = -0.2496$ y $c_2 = 0.0831$. Donde las diferencias absolutas son:

$1.122999999999574 \cdot 10^{-4}$

$4.863999999999795 \cdot 10^{-4}$

0.00114209999999998

0.00205119999999998

0.00313750000000002

0.00427679999999997

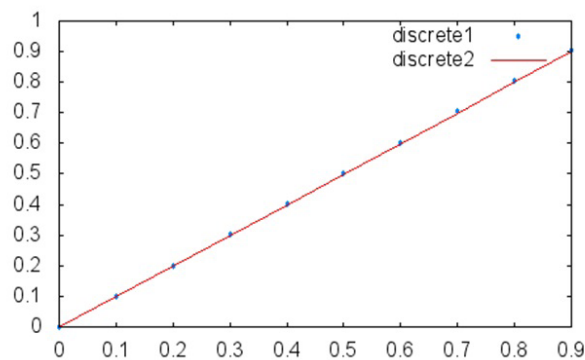
0.00529690000000005

0.00597760000000003

0.00605070000000008

0.00520000000000009

La función discrete1 ubica puntos para la aproximación por Wxmaxima y Discrete2 ubica los puntos para Octave. Para una visualización véase la gráfica 5



Grafica 5

El pseudocódigo para Octave (Matlab) es como sigue:

1. Se declara la función, `function y = f(x)`
2. Se asigna la función, por ejemplo `y = x^2`
3. Se finaliza la orden con `endfunction`
4. Se evalúan las integrales con el paquete “Quad”
5. Se construye la matriz con los coeficientes de las variables y se halla su inversa
6. Se construye la matriz con los términos independientes
7. Se multiplica la matriz inversa de los coeficientes de las variables por la matriz de los términos independientes y se hallan los coeficientes polinómicos de la aproximación.
8. Por último se utiliza el paquete de gráficas, para comparar los resultados obtenidos contra la solución exacta.

Comentarios Finales

El manejo adecuado de las herramientas computacionales, además de facilitar el aprendizaje de las ecuaciones de Fredholm de segunda especie, permitirá a los estudiantes la adquisición de conceptos y conocimientos en el área de la ingeniería, que serán decisivos en su actualización profesional.

Debido a que muchos conceptos son difíciles de conceptualizar, por lo abstracto de la disciplina, Wxmaxima representa un apoyo de visualización gráfica en pro de facilitar el aprendizaje del mismo.

La herramienta Wxmaxima permite repasar el proceso empleado para encontrar la aproximación de la ecuación integral, debido a que este queda plasmado en un fichero “.wxm”. Los procesos repasados coadyuvan a la “fijación” del conocimiento. Específicamente, sobre la solución de sistemas de ecuaciones lineales, también se aprende a encontrar desarrollo de Taylor para dos variables, lo cual permite ampliar el concepto de dicho teorema.

En el caso de programar en PASCAL u otros lenguajes, la elaboración de dicho programa, puede llevar horas. Aquí siguiendo los pasos indicados se puede construir en menos tiempo.

Algunas aproximaciones dependen de la cantidad de términos tomados en el truncamiento del polinomio de Taylor. Indicamos que no debemos tomar más de tres términos del polinomio de Taylor.

Con este trabajo se han expuesto, las fortalezas del paquete programable Wxmaxima como utilidad para la enseñanza de las ecuaciones integrales a nivel de pregrado o postgrado.

Referencias bibliográficas

9. Ortigoza G., Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Maxima, Revista Educación Matemática, Vol. 21, No 2, (2009), 143-167.
10. Corless R., Solution linear integral equations.am505a. PDE, Department of Applied Mathematics, University of Western Ontario, Canada, (1998).
11. Molina C., Tesis de Grado, Un método numérico de resolución de ecuaciones integrales, Universidad Autónoma de Puebla, México (2011).
12. Depool R., Tesis Doctoral, La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. actitudes de los estudiantes hacia el uso de programa de cálculo simbólico, Universidad de la Laguna, España, (2005).
13. Ipanaqué, R., Breve Manual de Máxima, Segunda Edición, Grupo de Investigación de la Universidad de Málaga, España, (2012).
14. Kanwal R., Linear integral equations, Academic Press, Pensilvania State University, EEUU, (1971).
15. Krasnov M., Kiseliov A., Makarenko G., Ecuaciones Integrales, Editorial MiR, Moscú, (1970).

Modelo diferencial de transferencia de masa para el análisis de la lixiviación ácida del oil fly ash.

Juan Hernández¹, José González², Gabriela Carruyo² y Cezar García².

¹Escuela de Ingeniería Química. Facultad de Ingeniería. Universidad Rafael Urdaneta. Maracaibo, Estado Zulia. Venezuela.

²Laboratorio de Carbón. Facultad de Ingeniería. Universidad del Zulia. Maracaibo, Estado Zulia. Venezuela.
E-mail:cgarcia@uru.edu

Recibido: 12-07-2016.

Aceptado: 29-11-2016.

Resumen

El objeto de esta investigación es el análisis de la cinética de lixiviación ácida del oil fly ash como un proceso difuncional controlado por la fase sólida, usando como método numérico de integración el método de colocación ortogonal en combinación con el método de Runge-Kutta de cuarto orden y la minimización de errores al cuadrado entre la data experimental y la data calculada. La cinética experimental de lixiviación ácida del oil fly ash se realizó bajo ensayos batch para las granulometrías +0.64, -0.64 +0.50, -0.50 +0.36, -0.36 +0.30 y -0.30 +0.12mm, para un tiempo de contacto de 300 minutos, y la solución lixivante HCl 2M y temperatura de 25°C. Los resultados de los errores totales al cuadrado, indicaron que el Modelo de Temkin reportó los menores valores de ajuste de las cinéticas de los metales Vanadio y Níquel.

Palabras Claves: Lixiviación ácida, difusividad variable, colocación ortogonal.

Differential mass transfer model for the analysis of the acid leaching of oil fly ash.

Abstract

The objective of this research is to analyze the kinetics for acid leaching of fly ash oil as a diffusional process controlled by solid phase by using a numerical method of integration the orthogonal collocation method in combination with RungeKutta method and minimization of squared errors between the experimental data and the calculated data. The experimental kinetics of acid leaching of fly ash oil it was carried out under batch test for the sizes +.064, -.064 +0.50, -0.50 +0.36, -0.36 +0.30 , -0.30 +12 mm, for a contact time of 300 minutes and the leaching solution HCl 2M and temperature of 25°C. The results of total squared errors indicated that the Temkin Model reported minor adjustment values of Vanadium and Nickel kinetics.

Key words: Acid leaching, variable diffusivity, orthogonal collocation.

Introducción

La lixiviación es una operación unitaria que implica la eliminación de una fracción soluble, en

forma de solución, a partir de una fase sólida permeable e insoluble a la cual esta asociada. El proceso de separación contiene normalmente la disolución preferencial de determinado componente con difusión a través de la matriz intersticial del material sólido por acción de un agente líquido de extracción (Treybal R. [1]).

La transferencia de masa para cualquier proceso de lixiviación suele interpretarse por una cinética de doble resistencia: i) Difusión desde el seno de la fase sólida hasta la superficie, y ii) Difusión desde la superficie al seno de la fase líquida. Este mecanismo de transferencia de masa de manera cuantitativa se expresa en términos de coeficientes de transferencia de masa (Plawsky J. [2]); (Bird B. et al [3]), así

$$\frac{\partial C^o}{\partial t} = K_L a_L (C^* - C^o) \quad (1)$$

$$\frac{\partial q^o}{\partial t} = k_s a_s (q^o - q^*) \quad (2)$$

donde, $X_A(r, t)$ es la concentración del lixiviado en la fase líquida, C^* es la concentración de equilibrio, $K_L a_L$, coeficiente global de transferencia de masa en la fase sólida, q^o la concentración del lixiviado en fase sólida, q^* la concentración de equilibrio, $K_S a_S$, coeficiente global de transferencia de masa en la fase sólida. La cinética de lixiviación es controlada por lo procesos difuncionales, de manera separada o por una combinación de ambas resistencias. La difusión dentro de la fase sólida se considera como proceso controlante cuando la transferencia de la fase líquida a la superficie de las partículas tiene lugar más rápidamente que dentro de las partículas. En la práctica los siguientes factores contribuyen en esto (Chourio E. et al [4]); (Prieto E. et al [5]): i) alta concentración del componente preferencial en el sólido; ii) fuerte agitación de la solución lixivante; iii) grandes tamaños de partículas; iv) bajas difusividades de los componentes preferenciales a través del sólido. Para la lixiviación ácida del Oil Fly Ash, las difusividades encontradas para el Vanadio están en el orden de 10^{-7} cm²/min, mientras para el Níquel en el orden de 10^{-9} cm²/min, de manera complementaria los coeficientes de transferencia de masa de la fase sólida resultaron menores a los coeficientes de transferencia de masa den la fase líquida. Todo lo anterior, indica que el proceso de lixiviación ácida es controlada por la transferencia de masa en la fase sólida (Rosas M. et al [6]).

La transferencia de masa controlada por difusión dentro de la partícula se expresa por la Segunda Ley de Fick con un coeficiente de difusividad interna dependiente de la concentración del componente preferencial en la partícula. De ésta manera, la cinética de lixiviación expresada por la Segunda Ley de Fick conduce a una ecuación diferencial en derivadas parciales no lineales, requiriendo para soluciones aproximadas de métodos numéricos como diferencias finitas o residuos pesados.

El objetivo de esta investigación es estudiar la cinética de lixiviación ácida del oil fly ash como un proceso difusional controlado por la fase sólida, usando como método numérico de integración el método de Colocación Ortogonal en combinación con el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Fundamentos Teóricos

El balance diferencial de transferencia de masa para el componente preferencial y mayoritario contenido en la partícula de geometría esférica y despreciando los flujos por difusión en las direcciones angulares, está dado por:

$$\frac{\partial X_A}{\partial \zeta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_{AS} \frac{\partial x}{\partial r} \right) \quad (3)$$

donde $X_A(r, \tau)$ es la fracción del componente A en la partícula a cualquier posición y tiempo, r representa la posición adimensional y $r = r/R$, τ representa el parámetro de tiempo adimensional o Número de Fourier de Masa $\tau = \frac{D_{AO} t}{R^2}$.

DAS representa el coeficiente de difusividad del componente preferencial y mayoritario a través de la partícula sólida con dependencia de la concentración (Martínez K. et al [7]); (Alaña J. et al [8]), así

$$\text{Ecuación de Temkin, } D_{AS} = D_{AO} \left(\alpha_1 \ell_n(\beta_1 X_A) \right) \quad (4)$$

$$\text{Ecuación de Gilliland, } D_{AS} = D_{AO} \left(\alpha_2 e^{\beta_2 X_A} \right) \quad (5)$$

Al sustituir las ecuaciones 4 y 5 en el balance diferencial de transferencia de masa, ecuación 3, se obtienen respectivamente:

$$\frac{\partial X_A}{\partial \tau} = \left(\alpha_1 \ell_n(\beta_1 X_A) \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial X_A}{\partial r} \right) + \frac{\alpha_1}{X_A} \left(\frac{\partial X_A}{\partial r} \right)^2 \quad (6)$$

$$\frac{\partial X_A}{\partial \tau} = \left(\alpha_2 e^{\beta_2 X_A} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial X_A}{\partial r} \right) + \left(\alpha_2 \beta_2 e^{\beta_2 X_A} \right) \left(\frac{\partial X_A}{\partial r} \right)^2 \quad (7)$$

Las condiciones de transferencia de masa asociadas a la cinética de lixiviación en ensayos experimentales tipo batch con densidad de mezcla constante como relación masa del oil fly ash y volumen de agente lixivante, se describen así:

- El componente preferencial y mayoritario se encuentra inicialmente en la partícula sólida del oil fly ash,

$$X_A(r, 0) = 1, \quad 0 \leq r < 1 \quad (8)$$

- No hay resistencia a la difusión en la solución que rodea al sólido, de modo que la concentración del componente A estará en equilibrio con la fase líquida a la superficie,

$$X_A(1, \tau) = \lambda, \quad 0 < \lambda < 1 \quad (9)$$

- Distribución simétrica en el centro de la partícula, para cualquier tiempo de contacto líquido sólido,

$$\frac{\partial X_A}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \quad \tau > 0 \quad (10)$$

Aplicando el método de colocación ortogonal [9-13] para distribución simétrica de la fracción másica del componente preferencial y mayoritario a las ecuaciones 6 y 7, se transforman en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales:

$$\frac{dX_{AJ}}{d\tau} = x_1 \ell_n(\beta_1 X_{AJ}) \sum_{i=1}^{N+1} B_{ji} X_{Ai} + \frac{\alpha_1}{X_{AJ}} \left(\sum_{i=1}^{N+1} A_{ji} X_{Ai} \right)^2 \quad (11)$$

$$\frac{dX_{AJ}}{d\tau} = \alpha_2 e^{\beta_2 X_{AJ}} \sum_{i=1}^{N+1} B_{ji} X_{Ai} + \alpha_2 \beta_2 e^{\beta_2 X_{AJ}} \left(\sum_{i=1}^{N+1} A_{ji} X_{Ai} \right)^2 \quad (12)$$

donde X_{AJ} corresponde a la fracción másica del componente A en el punto de colocación ortogonal r_J . Las condiciones de transferencia de masa en notación de colocación ortogonal se re-escriben así:

- La condición inicial, $X_{AJ} = 1, J=1,2,\dots N$ a $\zeta = 0$ (13)

- La condición de superficie, $X_{N+1} = \lambda, 0 < \lambda < 1$ a $\zeta > 0$ (14)

- La condición de simetría, $\sum_{i=1}^{N+1} A_{li} X_{Ai} = 0, i = 1,2,\dots N$ (15)

Los puntos de colocación ortogonal resultan de las raíces de los polinomios ortogonales definidos así:

$$\int_0^1 \omega(r) P_n(r) P_N(r) r^{-a-1} dr = 0, \quad n = 1,2,\dots N-1 \quad (16)$$

$$P_k(r) = \sum_{j=0}^k r^{-2j} \quad (17)$$

donde a es el factor de geometría, $a=1$, planar; $a=2$, cilíndrica; $a=3$, esférica. $\omega(r)$ representa la función pesante dada por $\omega(r) = 1.0$ y $\omega(r) = 1-r^2$. Si se requiere que la solución sea simétrica

alrededor de $r=0$, entonces la solución puede ser expandida en términos de potencia de r^{-2} ,

$$X_A(r, \tau) = \sum_{i=1}^{N+1} d_i(\tau) r^{-2i-2} \quad (18)$$

Al evaluar la ecuación 18 en el punto de colocación ortogonal r_J , se escribe así,

$$X_A(r_J, \tau) = \sum_{i=1}^{N+1} d_i(\tau) r_J^{-2i-2} \quad (19)$$

en notación matricial,

$$X = Q x d \quad (20)$$

donde los elementos de la matriz Q ,

$$Q_{ji} = r_J^{-2i-2} \quad (21)$$

La primera derivada de la Ecuación 18 en notación matricial

$$\frac{d \bar{X}}{d \bar{r}} = \bar{C} \bar{x} \bar{d} \quad (22)$$

donde los elementos de la matriz $\bar{C}$,

$$C_{ji} = (2i - 2) r_j^{-2i-3} \quad (23)$$

La segunda derivada de la ecuación 18 en notación matricial

$$\nabla^2 \bar{X} = \bar{D} \bar{x} \bar{d} \quad (24)$$

donde los elementos de la matriz $\bar{D}$,

$$D_{ji} = (2i - 2)(2i - 3) r_j^{-2i-4} \quad (25)$$

De la ecuación 20 se despeja la matriz $\bar{d}$, así

$$\bar{d} = \bar{Q}^{-1} \bar{x} \bar{X} \quad (26)$$

Sustituyendo la ecuación 26 en las ecuaciones 22 y 24, resulta:

$$\frac{d \bar{X}}{d \bar{r}} = \bar{C} \bar{x} \bar{d} = \bar{C} \bar{x} \bar{Q}^{-1} \bar{x} \bar{X} = \bar{A} \bar{x} \bar{X} \quad (27)$$

$$\nabla^2 \bar{X} = \bar{D} \bar{x} \bar{d} = \bar{D} \bar{x} \bar{Q}^{-1} \bar{x} \bar{X} = \bar{B} \bar{x} \bar{X} \quad (28)$$

Para comparar la cinética de lixiviación ácida del oil con el modelo diferencial de transferencia de masa con difusividad variable es preciso la integración numérica, de los valores radiales para el volumen de la partícula. Así, para evaluar integrales se usa la fórmula de cuadratura,

$$\int_0^1 F \left(r \right)^{-a-1} r^{-2} d r = \sum_{j=1}^{N+2} W_j F(r_j)^{-2} \quad (29)$$

sustituyendo $F \left(r \right)^{-2} = r^{-2i-2}$, resulta

$$F_i = \frac{1}{2i + a - 2} = \sum_{j=1}^{N+1} W_j r_j^{-2i-2} \quad (30)$$

donde, $a = 1$ para geometría laminar, $a = 2$ para cilíndrica y $a = 3$ para geometría esférica ; en notación matricial la ecuación (30) se escribe así,

$$\bar{F} = \bar{W} \bar{x} \bar{Q} \quad (31)$$

mientras la matriz $\bar{W}$ se obtiene, $\bar{W} = \bar{F} \bar{x} \bar{Q}^{-1}$ (32)

De esta manera, la fracción promedio de los metales mayoritarios en la partícula esférica del Oil Fly Ash a cualquier tiempo ζ está dada por

$$\hat{X}_A(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N+1} \bar{W}_i X_A(\bar{r}_i, \tau)}{\sum_{i=1}^{N+1} \bar{W}_i} \quad (33)$$

Método de Solución Numérica

La solución numérica de cada ecuación diferencial no-lineal, ecuaciones 11 y 12, resultante de la aplicación del método de colocación ortogonal para la distribución simétrica de la fracción del soluto sobre la partícula sólida de geometría esférica a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dadas por las ecuaciones 4 y 5 respectivamente, se obtiene por la combinación del método de integración de Euler y del método de optimización de Rosenbrock con la modificación de Davies, Swann y Campey. De manera secuencial en la metodología de solución numérica se procede así:

- Determinación del coeficiente de difusión DAO a partir de la solución analítica equivalente a un proceso de lixiviación independiente de concentración dada, esto es la ecuación diferencial,

$$\frac{\partial X_A}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial X}{\partial r} \right) \quad (34)$$

donde τ es el Número de Transferencia de Fourier de Masa dado por $\tau = \frac{D_{AO} t}{R^2}$, mientras la solución analítica con las condiciones de transferencia, ecuaciones 8-10, es:

$$\hat{X}_A(t) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D_{AO} t}{R^2}\right) \quad (35)$$

El Coeficiente de difusión DAO se calcula utilizando el método de búsqueda unidimensional de Davies, Swann y Campey (DSC) mediante el ajuste de los datos experimentales de la cinética de lixiviación con los valores calculados por la ecuación 35 bajo el criterio de la minimización de la función objetivo definida por:

$$F O B J \left(\bar{X}_A \right) = \sum_{i=1}^N \left(\bar{X}_{A \text{expt}} - \hat{X}_{Ai} \right)^2 \quad (36)$$

Los valores de D_{AO} se consideran válidos cuando la función objetivo sea mínima.

- Determinación de los parámetros α y β de la ecuación de Temkin y Gilliland a través de un método iterativo y de optimización de Rosebrock modificado por cálculo de las fracciones X_A a cada posición radial y tiempo mediante el uso del método de integración de Euler y ponderación que la función objetiva sea mínima.
- Selección de las características del método de colocación ortogonal, factor de geometría, fac-

tor pesante, número de puntos de colocación ortogonal. Seguidamente calcular las matrices de primera derivada (A) , de segunda derivada (B) y la matriz de integración (W) según las ecuaciones 27,28 y 32.

Discusión de Resultados

La cinética experimental de lixiviación ácida del Oil Fly Ash bajo ensayos batch se programaron para la granulometría presentada por las muestras disponibles, +0.64, -0.64+0.50, -0.50+0.36, -0.36+0.30 y -0.30+0.12mm, para los tiempos de contacto de 120, 150, 210, 240 y 300 minutos, y la solución lixivante HCl de 2M y temperatura ambiental (25°C) (Hernández [14]).

En las Tablas No 1-5 se presentan las cinéticas de lixiviación ácida para los metales mayoritarios de Vanadio y Niquel, a partir de la muestra granular de Oil Fly Ash de tamaño +0.67mm hasta la muestra pulverizada de tamaño -0.30-0.12mm. Del análisis de las referidas tablas, se destacan los siguientes elementos:

- Para la granulometría examinada en esta investigación, los metales mayoritarios V y Ni se distribuyen en mayores concentraciones para las muestras de mayores tamaños del Oil Fly Ash. Para la muestra de tamaño +0.67mm las concentraciones iniciales de V y Ni resultaron $330.13 \frac{mg}{g}$ y $13.42 \frac{mg}{g}$ respectivamente, en comparación con $92.06 \frac{mg}{g}$ y $4.65 \frac{mg}{g}$ para la muestra de menor tamaño -0.30+0.12mm.
- La Lixiviación ácida (HCl) muestra la mayor extracción al inicio del proceso, luego tiende hacia un valor estacionario, esto es, una alta velocidad de transferencia desde la fase sólida hasta la fase lixivante luego disminuye para tiempos mayores a 150 minutos de contacto. Los valores de extracción para las condiciones operacionales se ubicaron de 26.93% para el Vanadio y 12.22 para el Niquel.

Tabla No 1: Cinética de lixiviación para la granulometría +0.67mm.

Tiempo, min.	Concentración V, mg/g	Concentración Ni, mg/g
0	330.13	13.42
120	275.12	12.85
150	257.29	12.74
210	250.13	12.08
240	247.49	11.87
300	241.22	11.78

Tabla No 2: Cinética de lixiviación para la granulometría -0.64+0.50mm.

Tiempo, min.	Concentración V, mg/g	Concentración Ni, mg/g
0	315.74	9.34
120	271.45	8.85
150	262.73	8.81
210	260.01	8.71
240	259.13	8.68
300	257.82	8.60

Tabla No 3: Cinética de Lixiviación para la granulometría -0.50+0.36mm.

Tiempo, min.	Concentración V, mg/g	Concentración Ni, mg/g
0	145.73	6.61
120	118.93	6.31
150	115.11	6.30
210	114.37	6.29
240	113.99	6.28
300	113.44	6.27

Tabla No 4: Cinética de Lixiviación Ácida para la granulometría -0.36+0.30mm.

Tiempo, min.	Concentración V, mg/g	Concentración Ni, mg/g
0	100.47	4.7900
120	79.52	4.5060
150	76.21	4.4995
210	75.76	4.4945
240	75.66	4.1954
300	75.24	4.1948

Tabla No 5: Cinética de Lixiviación Ácida para la granulometría -0.30+0.12mm.

Tiempo, min.	Concentración V, mg/g	Concentración Ni, mg/g
0	92.06	4.6500
120	71.70	4.4143
150	68.41	4.4101
210	68.18	4.4067
240	67.67	4.3975
300	67.50	4.3965

La transferencia de los metales V y Ni desde la superficie interior del Oil Fly Ash a la interficie lixivante-sólido, suele interpretarse como un proceso de difusión en términos del coeficiente de difusión, con la distribución másica dada por la Ecuación 35 si se asume que los coeficientes de difusión independientes de la concentración de la fase sólida. Del ajuste de las distribuciones de Vanadio y Níquel con el tiempo de contacto entre el Oil Fly ash y la solución lixivante, se lograron los valores del coeficiente de Difusividad para V y Ni en función de granulometría para las condiciones operantes de la lixiviación ácida.

Tabla No 6: Coeficientes de Difusividad en función de la granulometría.

Granulometría mm.	Difusividad V, cm ² /min.	Difusividad Ni, cm ² /min.
+0.642	14.99 x 10 ⁻⁸	18.98 x 10 ⁻⁹
-0.642+0.500	5.59 x 10 ⁻⁸	7.01 x 10 ⁻⁹
-0.500+0.355	5.06 x 10 ⁻⁸	2.17 x 10 ⁻⁹
-0.355+0.300	4.06 x 10 ⁻⁸	4.44 x 10 ⁻⁹
-0300+0.125	1.88 x 10 ⁻⁸	0.67 x 10 ⁻⁹

En la Tabla No 6 se muestran los valores del Coeficiente de Difusividad para los metales V y Ni a través de la partícula de oil Fly Ash. Los valores de difusividad del Ni se encuentran en el orden de 10⁻⁹ en comparación con los valores de difusividad del V en el orden de 10⁻⁸, esto significa que la velocidad de transferencia de masa desde el Oil Fly Ash es más rápida para la lixiviación del Vanadio que para el

Níquel.

De igual manera, se observa mayor coeficiente de difusividad para las partículas de Oil Fly Ash de mayores tamaños, tanto para V como para Ni, atribuible al mayor hinchamiento de los poros por el agua libre en la fase lixivante.

La cinética de lixiviación expresada por la ecuación 3 con un coeficiente de difusividad variable dependiente de la concentración del metal en la fase sólida por intermedio de las ecuaciones 4 y 5, resuelta a través del método integro-numérico de colocación ortogonal y por optimización de los coeficientes α y β , tomando como base referencial la cinética experimental contenida en las Tablas 1-5, se presenta en las Tablas 7-10 en función de los referidos coeficientes α y β para los modelos de Temkin y Gilliland. Del análisis de los errores obtenidos de la diferencia de errores totales al cuadrado entre la data experimental y la cinética calculada por el método de colocación ortogonal son bajos encontrándose en un rango entre 10^{-3} y 10^{-6} , mientras el modelo de Temkin reporta valores menores para el ajuste de las cinéticas de los metales Vanadio y Níquel. A título ilustrativo, el coeficiente de difusividad variable con la concentración de la fase sólida, para el V reporta un error total de 2.64×10^{-4} para la fracción granular. Para el modelo de Temkin comparado con 1.3×10^{-3} con el modelo de Gilliland; un de 4.18×10^{-4} para la fracción pulverizada con el modelo de Temkin en comparación con 6.83×10^{-4} con el modelo de Gilliland para la lixiviación del Vanadio.

Tabla No 7: Ajuste de la data cinética experimental para la lixiviación de vanadio con ácido clorhídrico como lixivante; al modelo de Temkin.

Granulometría (mm)	α	β	Error.
+0.642	0.0974	3.6531×10^5	2.6399×10^{-4}
-0.642+0.5	0.0923	8.5070×10^5	3.4255×10^{-4}
-0.5+0.355	3.1716	5.5398×10^3	0.0012
-0.355+0.3	6.5290	3.5415×10^3	4.0462×10^{-4}
-0.3+0.125	7.7820	8.6652×10^3	4.1856×10^{-4}

Tabla No 8: Ajuste de la data cinética experimental para la lixiviación de níquel con ácido clorhídrico como lixivante; al modelo de Temkin.

Granulometría (mm)	α	β	Error.
+0.642	13.4999	7.5498×10^3	4.5166×10^{-4}
-0.642+0.5	37.8615	2.5742×10^3	9.9542×10^{-5}
-0.5+0.355	122.8208	1.9914×10^3	1.0740×10^{-5}
-0.355+0.3	12.0761	7.5362×10^3	6.2761×10^{-4}
-0.3+0.125	130.0653	2.6812×10^3	7.1175×10^{-6}

Tabla No 9: Ajuste de la data cinética experimental para la lixiviación de vanadio con ácido clorhídrico como lixivante; al modelo de Gilliland.

Granulometría (mm)	α	β	Error.
+0.642	5.1986	2.0422	0.0013
-0.642+0.5	7.7367	2.5599	4.4492×10^{-4}
-0.5+0.355	8.7964	2.1328	4.2554×10^{-4}
-0.355+0.3	6.8440	2.3178	5.9122×10^{-4}
-0.3+0.125	6.1629	2.2603	6.8284×10^{-4}

Tabla No 10: Ajuste de la data cinética experimental para la lixiviación de níquel con ácido clorhídrico como lixiviante; al modelo de Gilliland.

Granulometría (mm)	α	β	Error.
+0.642	2.3233	4.3354	4.8182e-004
-0.642+0.5	2.6500	4.9773	1.0342e-004
-0.5+0.355	1.7593	6.5465	1.0592e-005
-0.355+0.3	2.2751	4.2086	6.6795e-004
-0.3+0.125	3.0418	6.1249	6.6570e-006

Conclusiones

Del análisis de los resultados de esta investigación se derivan las siguientes conclusiones:

- Los metales V y Ni se distribuyeron en mayores concentraciones para las muestras de mayores tamaños del Oil Fly Ash, así 330.13 mg/g y 13.42 mg/g respectivamente, para la muestra de tamaño +0.67mm;
- La lixiviación ácida con HCl presentó la mayor separación de los metales V y Ni para tiempos menores de 120 minutos, luego tiende hacia un valor estacionario para tiempos mayores a 150 minutos;
- Los valores de difusividad constante del Ni se encuentran en el orden de 10^{-9} en comparación con los valores de difusividad del V en el orden de 10^{-8} , esto significa que la velocidad de transferencia de masa desde el seno del Oil Fly Ash es mayor para la lixiviación del Vanadio que para el Níquel;
- Del análisis de los errores totales al cuadrado entre la cinética experimental y la cinética calculada por el método de colocación ortogonal, ubicándose entre 10^{-3} y 10^{-6} , el modelo de Temkin reporta los menores valores para el ajuste de las cinéticas de los metales Vanadio y Níquel.

Referencias Bibliográficas

1. Treybal R., Mass-transfer operations, Third Edition, McGraw – Hill Book Co., New York, Chapters 13 (1981).
2. Plawsky J.L., Transport Phenomena Fundamentals, Third Edition, CRC Press, New York, Chapters 1-3 (2014).
3. Bird B., Stewart W. and Lightfoot W, Transport Phenomena, Revised Edition, John Wiley and sons, New York, Chapter 21. (2001)
4. Chourio E., Ferrer X., Arrieta I., Fernandez N., Sarmiento C. y García C., Modelos de difusión con control de la fase sólida para adsorción e intercambio iónico, Rev. Tec. Ing. Univ. Zulia, Vol. 20 No.3, (1997), 245-255.
5. Prieto E., Arrieta I., Sarmiento C, y García C., Estudio cinético del Sistema Cadmio-hidrógeno sobre resinas sintéticas bajo control de la fase sólida, Ciencia Vol.9, No. 3, 405-416, (2001).
6. Rosas M., Martínez K., González J., Rincón C., Alaña J. y García C., Análisis difusional de lixiviación ácida de cenizas volantes, Revista Venezolana de Tecnología y sociedad, Vol.2, No.1, (2009), 11-28.
7. Martínez K., Alaña J., Ferrer J., Faria J., Ramones E. y García C. Cinética de Intercambios iónico en leche cruda y pausterizada comercial, Rev. Tec. IngUniv. Zulia, Vol.29, No.2, (2006), 182-193.

8. Alaña J., Martínez K., González J., Hernández J. y García C., Cinética de Intercambio Iónico bajo control mixto en medio lácteo, *Revista Tecnocientífica URU*, Vol.1, 19-29, Enero-Junio, (2012).
9. Finlayson B.A., The method of weighted residuals and variational principles with applications in fluid mechanics, heat and mass transfer, Academic Press, New York, (1972).
10. Finlayson B.A., Nonlinear analysis in chemical engineering, McGraw-Hill, New York, (1980).
11. García C., Métodos Aproximados Aplicados a Fenómenos de Transporte, Edición 1, Universidad del Zulia-Venezuela, (2008).
12. Soliman M., Al-Zeghayer Y. and Ajbar A., A modified orthogonal collocation method for reaction diffusion problems, *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, Vol.31, No.4, (2014).
13. Housam B. Shaikh A. and Bellagi A., Chebyshev orthogonal collocation techniques to solve transport phenomena problems, *Computer Applications in Engineering Education*, Vol.23, No.4, (2015), 422-431 .
14. Hernandez J., Lixiviación diferenciada de metals mayoritarios de cenizas volantes, Trabajo de Grado, M.Sc. en Ingeniería Química, Universidad del Zulia, Maracaibo-Venezuela, (2015).

Integrales que Involucran funciones de Bessel de tres variables y dos parámetros

Leda Galué

Centro de Investigación de Matemática Aplicada. Facultad de Ingeniería.
Universidad del Zulia. Maracaibo, Estado Zulia, Venezuela.
lgalue@hotmail.com

Recibido: 12-07-2016.

Aceptado: 29-11-2016.

Resumen

Las funciones de Bessel tienen aplicaciones en procesos multifotón, en el tratamiento analítico de procesos de campo de iluminación, en el análisis de procesos de dispersión para los cuales la aproximación bipolar no puede ser usada, en el campo de la radiación sincrotrón, en el análisis de grandes estructuras, etc. Varias funciones de Bessel generalizadas han sido definidas y estudiadas por diversos autores. En este trabajo se evalúan los siguientes tipos de integrales que involucran funciones de Bessel de tres variables y dos parámetros.

Palabras clave: Funciones de Bessel generalizadas, funciones especiales, integrales.

Integrals involving Bessel functions of three variables and two parameters

Abstract

The Bessel functions have applications in multiphoton processes, in analytical treatment of processes of lighting fields, in analysis of dispersion processes for which the bipolar approximation cannot be used, in the field of synchrotron radiation, in the analysis of big structures, etc. Several generalized Bessel functions have been defined and studied by different authors. In this paper the following types of integrals involving Bessel functions of three variables and two parameters are evaluated.

Key Words: Generalized Bessel functions, special functions, integrals.

Introducción

Las funciones especiales son de suma importancia para científicos e ingenieros debido a sus aplicaciones, en particular las funciones de Bessel aparecen en la solución de ecuaciones diferenciales en matemática, física, química, ingeniería y otras ramas de la ciencia y la tecnología (Galué et al [1]). Las funciones de Bessel tienen aplicaciones en procesos multifotón (Dattoli et al [2]), en el tratamiento analítico de procesos de campo de iluminación especialmente en las teorías de ionización multifotón no-perturbada (Reiss y Krainov [3]), en el análisis de procesos de dispersión para los cuales la aproximación bipolar no puede ser usada (Dattoli et al [4]), en el campo de la radiación sincrotrón (Dattoli et al [5]), en el análisis de grandes estructuras [6], etc.

Varias funciones de Bessel generalizadas han sido definidas y estudiadas por diversos autores ([1]-[25]). Entre éstas se tiene la función de Bessel generalizada de tres variables, dos parámetros y un índice (Prieto et al [23]), denotada por $J_n(x, y, z; \tau, \delta)$, la cual puede ser introducida usando la siguiente función generadora:

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{y}{2}\left(t^2\tau - \frac{1}{t^2\tau}\right) + \frac{z}{2}\left(t^3\delta - \frac{1}{t^3\delta}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x, y, z; \tau, \delta) \quad (1)$$

donde x, y, z son variables reales y t, τ, δ son parámetros complejos $0 < |t|, |\tau|, |\delta| < \infty$.

Además, $J_n(x, y, z; \tau, \delta)$ puede ser representada por medio de la serie convergente

$$J_n(x, y, z; \tau, \delta) = \sum_{m, l=-\infty}^{+\infty} \tau^m \gamma^l J_{n-2m-l}(x) J_{m-l}(y) J_l(z) \quad (2)$$

Demostración:

Usando la función generadora dada en (1)

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x, y, z; \tau, \gamma\tau) &= \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] \exp\left[\frac{y}{2}\left(t^2\tau - \frac{1}{t^2\tau}\right)\right] \exp\left[\frac{z}{2}\left(t^3\gamma\tau - \frac{1}{t^3\gamma\tau}\right)\right] \\ &= \sum_{h, k, l=-\infty}^{+\infty} t^{h+2k+3l} \tau^k (\gamma\tau)^l J_h(x) J_k(y) J_l(z) \\ &= \sum_{h, k, l=-\infty}^{+\infty} t^{(h+l)+2(k+l)} \tau^k (\gamma\tau)^l J_h(x) J_k(y) J_l(z) \end{aligned}$$

haciendo cambio de índices

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x, y, z; \tau, \gamma\tau) = \sum_{j, m, l=-\infty}^{+\infty} t^{j+2m} \tau^m \gamma^l J_{j-l}(x) J_{m-l}(y) J_l(z)$$

sea $n = j + 2m$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x, y, z; \tau, \gamma\tau) = \sum_{m, l=-\infty}^{+\infty} t^n \tau^m \gamma^l J_{n-2m-l}(x) J_{m-l}(y) J_l(z)$$

y al igualar los coeficientes se obtiene el resultado (2).

En este trabajo se evalúan tres tipos de integrales que involucran a la función $J_0(x, y, z; \tau, \delta)$.

A continuación se establece un resultado que será de mucha utilidad en el desarrollo de la próxima sección.

Consideremos el siguiente caso particular de (2):

$$J_0(x, y, z; \tau, \gamma\tau) = \sum_{m, l=-\infty}^{+\infty} \tau^m \gamma^l J_{-2m-l}(x) J_{m-l}(y) J_l(z).$$

Separando convenientemente las sumatorias se tiene

$$J_0(x, y, z; \tau, \gamma\tau) = \sum_{m=-\infty}^{-1} \sum_{l=-\infty}^0 \tau^m \gamma^l J_{-2m-l}(x) J_{m-l}(y) J_l(z) +$$

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} \sum_{l=1}^{+\infty} \tau^m \gamma^l J_{-2m-l}(x) J_{m-l}(y) J_l(z) + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^0 \tau^m \gamma^l J_{-2m-l}(x) J_{m-l}(y) J_l(z) +$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} \tau^m \gamma^l J_{-2m-l}(x) J_{m-l}(y) J_l(z).$$

Haciendo cambios de índices

$$J_0(x, y, z; \tau, \gamma \tau) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \tau^{-m} \gamma^{-l} J_{2m+l}(x) J_{-m+l}(y) J_{-l}(z) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \tau^{-m} \gamma^l J_{2m-l}(x) J_{-m-l}(y) J_l(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \tau^m \gamma^{-l} J_{-2m+l}(x) J_{m+l}(y) J_{-l}(z) +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \tau^m \gamma^l J_{-2m-l}(x) J_{m-l}(y) J_l(z)$$

el cual puede escribirse como

$$J_0(x, y, z; \tau, \gamma \tau) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^m \tau^{-m} \gamma^{-l} J_{2m+l}(x) J_{-m+l}(y) J_{-l}(z) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m+1}^{\infty} \tau^{-m} \gamma^{-l} J_{2m+l}(x) J_{-m+l}(y) J_{-l}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2m} \tau^{-m} \gamma^l J_{2m-l}(x) J_{-m-l}(y) J_l(z) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=2m+1}^{\infty} \tau^{-m} \gamma^l J_{2m-l}(x) J_{-m-l}(y) J_l(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{2m} \tau^m \gamma^{-l} J_{-2m+l}(x) J_{m+l}(y) J_{-l}(z) +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=2m+1}^{\infty} \tau^m \gamma^{-l} J_{-2m+l}(x) J_{m+l}(y) J_{-l}(z) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \tau^m \gamma^l J_{-2m-l}(x) J_{m-l}(y) J_l(z) +$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=l+1}^{\infty} \tau^m \gamma^l J_{-2m-l}(x) J_{m-l}(y) J_l(z)$$

donde se intercambi6 el orden de sumaci6n de la 6ltima serie doble sobre la base de la convergencia absoluta. Ahora, usando la bien conocida propiedad de simetría de las funciones de Bessel (Lebedev, Special [26])

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ se obtiene}$$

$$J_0(x, y, z; \tau, \gamma \tau) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^m (-1)^m \tau^{-m} \gamma^{-l} J_{2m+l}(x) J_{m-l}(y) J_l(z) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m+1}^{\infty} (-1)^l \tau^{-m} \gamma^{-l} J_{2m+l}(x) J_{-m+l}(y) J_l(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2m} (-1)^{m+l} \tau^{-m} \gamma^l J_{2m-l}(x) J_{m+l}(y) J_l(z) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=2m+1}^{\infty} (-1)^{-m} \tau^{-m} \gamma^l J_{2m+l}(x) J_{m+l}(y) J_l(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{2m} \tau^m \gamma^{-l} J_{-2m+l}(x) J_{m+l}(y) J_{-l}(z) +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=2m+1}^{\infty} (-1)^l \tau^m \gamma^{-l} J_{-2m+l}(x) J_{m+l}(y) J_l(z) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l (-1)^m \tau^m \gamma^l J_{2m+l}(x) J_{-m+l}(y) J_l(z) +$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=l+1}^{\infty} (-1)^l \tau^m \gamma^l J_{2m+l}(x) J_{m-l}(y) J_l(z)$$

(3)

Cálculo de Integrales

Integrales de la forma $\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ax-by-cz} J_0(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}; \tau, \gamma\tau) dx dy dz$, $\operatorname{Re}(a) > 0$,

$\operatorname{Re}(b) > 0, \operatorname{Re}(c) > 0$:

Sustituyendo $J_0(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}; \tau, \gamma\tau)$ por su representación en serie dada en (3)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ax-by-cz} J_0(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}; \tau, \gamma\tau) dx dy dz = \\
 & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ax-by-cz} \left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^m (-1)^m \tau^{-m} \gamma^{-l} J_{2m+l}(\sqrt{x}) J_{m-l}(\sqrt{y}) J_l(\sqrt{z}) + \right. \\
 & \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=m+1}^{+\infty} (-1)^l \tau^{-m} \gamma^{-l} J_{2m+l}(\sqrt{x}) J_{-m+l}(\sqrt{y}) J_l(\sqrt{z}) + \\
 & \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{2m} (-1)^{m+l} \tau^{-m} \gamma^l J_{2m-l}(\sqrt{x}) J_{m+l}(\sqrt{y}) J_l(\sqrt{z}) + \\
 & \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=2m+1}^{+\infty} (-1)^{-m} \tau^{-m} \gamma^l J_{-2m+l}(\sqrt{x}) J_{m+l}(\sqrt{y}) J_l(\sqrt{z}) + \\
 & \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{2m} \tau^m \gamma^{-l} J_{2m-l}(\sqrt{x}) J_{m+l}(\sqrt{y}) J_l(\sqrt{z}) + \\
 & \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{l=2m+1}^{+\infty} (-1)^l \tau^m \gamma^{-l} J_{-2m+l}(\sqrt{x}) J_{m+l}(\sqrt{y}) J_l(\sqrt{z}) + \\
 & \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^l (-1)^m \tau^m \gamma^l J_{2m+l}(\sqrt{x}) J_{-m+l}(\sqrt{y}) J_l(\sqrt{z}) + \\
 & \left. \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=l+1}^{+\infty} (-1)^l \tau^m \gamma^l J_{2m+l}(\sqrt{x}) J_{m-l}(\sqrt{y}) J_l(\sqrt{z}) \right\} dx dy dz.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Sea

$$I_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ax-by-cz} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^m (-1)^m \tau^{-m} \gamma^{-l} J_{2m+l}(\sqrt{x}) J_{m-l}(\sqrt{y}) J_l(\sqrt{z}) dx dy dz.$$

Ahora, intercambiando el orden de las integrales y las sumatorias, asumiendo que las integrales son absolutamente convergentes, se obtiene

$$\begin{aligned}
 I_1 = & \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^m (-1)^m \tau^{-m} \gamma^{-l} \left(\int_0^\infty e^{-ax} J_{2m+l}(\sqrt{x}) dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-by} J_{m-l}(\sqrt{y}) dy \right) \times \\
 & \left(\int_0^\infty e^{-cz} J_l(\sqrt{z}) dz \right).
 \end{aligned}$$

La sustitución de cada función de Bessel por su representación en serie (Lebedev, N., Special [26, Pág. 102, No. (5.3.2)])

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi, \quad \nu \in \mathbb{C} \tag{5}$$

conduce a la expresión

$$I_1 = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^m (-1)^m \tau^{-m} \gamma^{-l} \left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k_1}}{2^{2m+l+2k_1} k_1! \Gamma(2m+l+k_1+1)} \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{\frac{2m+l}{2}+k_1} dx \right) \times$$

$$\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k_2}}{2^{m-l+2k_2} k_2! \Gamma(m-l+k_2+1)} \int_0^{\infty} e^{-by} y^{\frac{m-l}{2}+k_2} dy \right) \times$$

$$\left(\sum_{k_3=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k_3}}{2^{l+2k_3} k_3! \Gamma(l+k_3+1)} \int_0^{\infty} e^{-cz} z^{\frac{l}{2}+k_3} dz \right).$$

Evaluando las integrales mediante el siguiente resultado [26, p. 13, No. (1.5.1)]

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^{z-1} dt = \frac{\Gamma(z)}{p^z}, \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (6)$$

se obtiene

$$I_1 = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^m (-1)^m \tau^{-m} \gamma^{-l} \left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k_1} \Gamma(\frac{2m+l}{2} + k_1 + 1)}{2^{2m+l+2k_1} a^{\frac{2m+l}{2}+k_1+1} k_1! \Gamma(2m+l+k_1+1)} \right) \times$$

$$\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k_2} \Gamma(\frac{m-l}{2} + k_2 + 1)}{2^{m-l+2k_2} b^{\frac{m-l}{2}+k_2+1} k_2! \Gamma(m-l+k_2+1)} \right) \left(\sum_{k_3=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k_3} \Gamma(\frac{l}{2} + k_3 + 1)}{2^{l+2k_3} c^{\frac{l}{2}+k_3+1} k_3! \Gamma(l+k_3+1)} \right).$$

Al aplicar la definición de la función hipergeométrica ${}_pF_q(\cdot)$ [26, p. 275, No. (9.14.2)] la expresión anterior puede escribirse en la forma siguiente

$$I_1 = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^m \frac{(-1)^m \Gamma(\frac{2m+l}{2} + 1) \Gamma(\frac{m-l}{2} + 1) \Gamma(\frac{l}{2} + 1) \tau^{-m} \gamma^{-l}}{2^{3m+l} \Gamma(2m+l+1) \Gamma(m-l+1) \Gamma(l+1) a^{\frac{2m+l}{2}+1} b^{\frac{m-l}{2}+1} c^{\frac{l}{2}+1}} \times$$

$${}_1F_1\left(\frac{2m+l}{2} + 1; 2m+l+1; -\frac{1}{4a}\right) {}_1F_1\left(\frac{m-l}{2} + 1; m-l+1; -\frac{1}{4b}\right) \times$$

$${}_1F_1\left(\frac{l}{2} + 1; l+1; -\frac{1}{4c}\right). \quad (7)$$

Similarmente se evalúan las otras integrales y finalmente se obtiene

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-ax-by-cz} J_0(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}; \tau, \gamma \tau) dx dy dz =$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^m \left[\frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{2m+l}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{m-l}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right) \tau^{-m} \gamma^{-l}}{2^{3m+l} \Gamma(2m+l+1) \Gamma(m-l+1) \Gamma(l+1) a^{\frac{2m+l}{2}+1} b^{\frac{m-l}{2}+1} c^{\frac{l}{2}+1}} \times \right. \\
 & {}_1F_1\left(\frac{2m+l}{2}+1; 2m+l+1; -\frac{1}{4a}\right) {}_1F_1\left(\frac{m-l}{2}+1; m-l+1; -\frac{1}{4b}\right) \times \\
 & \left. {}_1F_1\left(\frac{l}{2}+1; l+1; -\frac{1}{4c}\right) \right] + \\
 & \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=m+1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{2m+l}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{-m+l}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right) \tau^{-m} \gamma^{-l}}{2^{m+3l} \Gamma(2m+l+1) \Gamma(-m+l+1) \Gamma(l+1) a^{\frac{2m+l}{2}+1} b^{\frac{-m+l}{2}+1} c^{\frac{l}{2}+1}} \times \right. \\
 & {}_1F_1\left(\frac{2m+l}{2}+1; 2m+l+1; -\frac{1}{4a}\right) {}_1F_1\left(\frac{-m+l}{2}+1; -m+l+1; -\frac{1}{4b}\right) \times \\
 & \left. {}_1F_1\left(\frac{l}{2}+1; l+1; -\frac{1}{4c}\right) \right] + \\
 & \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{2m} \left[\frac{(-1)^{m+l} \Gamma\left(\frac{2m-l}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{m+l}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right) \tau^{-m} \gamma^l}{2^{3m+l} \Gamma(2m-l+1) \Gamma(m+l+1) \Gamma(l+1) a^{\frac{2m-l}{2}+1} b^{\frac{m+l}{2}+1} c^{\frac{l}{2}+1}} \times \right. \\
 & {}_1F_1\left(\frac{2m-l}{2}+1; 2m-l+1; -\frac{1}{4a}\right) {}_1F_1\left(\frac{m+l}{2}+1; m+l+1; -\frac{1}{4b}\right) \times \\
 & \left. {}_1F_1\left(\frac{l}{2}+1; l+1; -\frac{1}{4c}\right) \right] + \\
 & \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=2m+1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^{-m} \Gamma\left(\frac{-2m+l}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{m+l}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right) \tau^{-m} \gamma^l}{2^{-m+3l} \Gamma(-2m+l+1) \Gamma(m+l+1) \Gamma(l+1) a^{\frac{-2m+l}{2}+1} b^{\frac{m+l}{2}+1} c^{\frac{l}{2}+1}} \times \right. \\
 & {}_1F_1\left(\frac{-2m+l}{2}+1; -2m+l+1; -\frac{1}{4a}\right) {}_1F_1\left(\frac{m+l}{2}+1; m+l+1; -\frac{1}{4b}\right) \times \\
 & \left. {}_1F_1\left(\frac{l}{2}+1; l+1; -\frac{1}{4c}\right) \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{2m} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{2m-l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m+l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right) \tau^m \gamma^{-l}}{2^{3m+l} \Gamma(2m-l+1)\Gamma(m+l+1)\Gamma(l+1) a^{\frac{2m-l}{2}+1} b^{\frac{m+l}{2}+1} c^{\frac{l}{2}+1}} \times \right. \\
& {}_1F_1\left(\frac{2m-l}{2}+1; 2m-l+1; -\frac{1}{4a}\right) {}_1F_1\left(\frac{m+l}{2}+1; m+l+1; -\frac{1}{4b}\right) \times \\
& \left. {}_1F_1\left(\frac{l}{2}+1; l+1; -\frac{1}{4c}\right) \right] + \\
& \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{l=2m+1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{-2m+l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m+l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right) \tau^m \gamma^{-l}}{2^{-m+3l} \Gamma(-2m+l+1)\Gamma(m+l+1)\Gamma(l+1) a^{\frac{-2m+l}{2}+1} b^{\frac{m+l}{2}+1} c^{\frac{l}{2}+1}} \times \right. \\
& {}_1F_1\left(\frac{-2m+l}{2}+1; -2m+l+1; -\frac{1}{4a}\right) {}_1F_1\left(\frac{m+l}{2}+1; m+l+1; -\frac{1}{4b}\right) \times \\
& \left. {}_1F_1\left(\frac{l}{2}+1; l+1; -\frac{1}{4c}\right) \right] + \\
& \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left[\frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{2m+l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{-m+l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right) \tau^m \gamma^l}{2^{m+3l} \Gamma(2m+l+1)\Gamma(-m+l+1)\Gamma(l+1) a^{\frac{2m+l}{2}+1} b^{\frac{-m+l}{2}+1} c^{\frac{l}{2}+1}} \times \right. \\
& {}_1F_1\left(\frac{2m+l}{2}+1; 2m+l+1; -\frac{1}{4a}\right) {}_1F_1\left(\frac{-m+l}{2}+1; -m+l+1; -\frac{1}{4b}\right) \times \\
& \left. {}_1F_1\left(\frac{l}{2}+1; l+1; -\frac{1}{4c}\right) \right] + \\
& \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=l+1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{2m+l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right) \tau^m \gamma^l}{2^{3m+l} \Gamma(2m+l+1)\Gamma(m-l+1)\Gamma(l+1) a^{\frac{2m+l}{2}+1} b^{\frac{m-l}{2}+1} c^{\frac{l}{2}+1}} \times \right. \\
& {}_1F_1\left(\frac{2m+l}{2}+1; 2m+l+1; -\frac{1}{4a}\right) {}_1F_1\left(\frac{m-l}{2}+1; m-l+1; -\frac{1}{4b}\right) \times \\
& \left. {}_1F_1\left(\frac{l}{2}+1; l+1; -\frac{1}{4c}\right) \right] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

(8)

Integrales de la forma $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1-x^2)^{\mu-1} (1-y^2)^{\nu-1} (1-z^2)^{\omega-1} \times$
 $J_0\left(\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-z^2}; \tau, \gamma\tau\right) dx dy dz, \operatorname{Re}(\mu) > 0, \operatorname{Re}(\nu) > 0, \operatorname{Re}(\omega) > 0:$

Usando un procedimiento similar al aplicado en la sección anterior y empleando en lugar de (6) el resultado (Gradshteyn, I. S. and Ryzhik [27, p. 294, No. (3.249.5)])

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\mu-1} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \mu\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})}, \operatorname{Re}(\mu) > 0$$

se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1-x^2)^{\mu-1} (1-y^2)^{\nu-1} (1-z^2)^{\omega-1} J_0\left(\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-z^2}; \tau, \gamma\tau\right) dx dy dz \\ &= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^3 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=0}^m \left[\frac{(-1)^m \Gamma\left(\mu + \frac{2m+l}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{m-l}{2}\right) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2}\right) \tau^{-m} \gamma^{-l}}{2^{3m+l} \Gamma\left(\mu + \frac{2m+l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2m+l+1) \Gamma\left(\nu + \frac{m-l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(m-l+1) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(l+1)} \right] \times \right. \\ & {}_1F_2\left(\mu + \frac{2m+l}{2}; \mu + \frac{2m+l}{2} + \frac{1}{2}, 2m+l+1; -\frac{1}{4}\right) \times \\ & {}_1F_2\left(\nu + \frac{m-l}{2}; \nu + \frac{m-l}{2} + \frac{1}{2}, m-l+1; -\frac{1}{4}\right) {}_1F_2\left(\omega + \frac{l}{2}; \omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{1}{4}\right) \Big] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m+1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^l \Gamma\left(\mu + \frac{2m+l}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{l-m}{2}\right) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2}\right) \tau^{-m} \gamma^{-l}}{2^{m+3l} \Gamma\left(\mu + \frac{2m+l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2m+l+1) \Gamma\left(\nu + \frac{l-m}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(-m+l+1) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(l+1)} \right] \times \\ & {}_1F_2\left(\mu + \frac{2m+l}{2}; \mu + \frac{2m+l}{2} + \frac{1}{2}, 2m+l+1; -\frac{1}{4}\right) \times \\ & {}_1F_2\left(\nu + \frac{l-m}{2}; \nu + \frac{l-m}{2} + \frac{1}{2}, -m+l+1; -\frac{1}{4}\right) {}_1F_2\left(\omega + \frac{l}{2}; \omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{1}{4}\right) \Big] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2m} \left[\frac{(-1)^{m+l} \Gamma\left(\mu + \frac{2m-l}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{m+l}{2}\right) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2}\right) \tau^{-m} \gamma^l}{2^{3m+l} \Gamma\left(\mu + \frac{2m-l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2m-l+1) \Gamma\left(\nu + \frac{m+l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(m+l+1) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(l+1)} \right] \times \\ & {}_1F_2\left(\mu + \frac{2m-l}{2}; \mu + \frac{2m-l}{2} + \frac{1}{2}, 2m-l+1; -\frac{1}{4}\right) \times \\ & {}_1F_2\left(\nu + \frac{m+l}{2}; \nu + \frac{m+l}{2} + \frac{1}{2}, m+l+1; -\frac{1}{4}\right) {}_1F_2\left(\omega + \frac{l}{2}; \omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{1}{4}\right) \Big] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=2m+1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{-m} \Gamma\left(\mu + \frac{l-2m}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{m+l}{2}\right) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2}\right) \tau^{-m} \gamma^l}{2^{-m+3l} \Gamma\left(\mu + \frac{l-2m}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(-2m+l+1) \Gamma\left(\nu + \frac{m+l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(m+l+1) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(l+1)} \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& {}_1F_2\left(\mu + \frac{l-2m}{2}; \mu + \frac{l-2m}{2} + \frac{1}{2}, -2m+l+1; -\frac{1}{4}\right) \times \\
& {}_1F_2\left(\nu + \frac{m+l}{2}; \nu + \frac{m+l}{2} + \frac{1}{2}, m+l+1; -\frac{1}{4}\right) {}_1F_2\left(\omega + \frac{l}{2}; \omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{1}{4}\right) + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{2m} \left[\frac{\Gamma\left(\mu + \frac{2m-l}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{m+l}{2}\right) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2}\right) \tau^m \gamma^{-l}}{2^{3m+l} \Gamma\left(\mu + \frac{2m-l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2m-l+1) \Gamma\left(\nu + \frac{m+l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(m+l+1) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(l+1)} \right] \times \\
& {}_1F_2\left(\mu + \frac{2m-l}{2}; \mu + \frac{2m-l}{2} + \frac{1}{2}, 2m-l+1; -\frac{1}{4}\right) \times \\
& {}_1F_2\left(\nu + \frac{m+l}{2}; \nu + \frac{m+l}{2} + \frac{1}{2}, m+l+1; -\frac{1}{4}\right) {}_1F_2\left(\omega + \frac{l}{2}; \omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{1}{4}\right) + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=2m+1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^l \Gamma\left(\mu + \frac{l-2m}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{m+l}{2}\right) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2}\right) \tau^m \gamma^{-l}}{2^{-m+3l} \Gamma\left(\mu + \frac{l-2m}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(-2m+l+1) \Gamma\left(\nu + \frac{m+l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(m+l+1) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(l+1)} \right] \times \\
& {}_1F_2\left(\mu + \frac{l-2m}{2}; \mu + \frac{l-2m}{2} + \frac{1}{2}, -2m+l+1; -\frac{1}{4}\right) \times \\
& {}_1F_2\left(\nu + \frac{m+l}{2}; \nu + \frac{m+l}{2} + \frac{1}{2}, m+l+1; -\frac{1}{4}\right) {}_1F_2\left(\omega + \frac{l}{2}; \omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{1}{4}\right) + \\
& \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left[\frac{(-1)^m \Gamma\left(\mu + \frac{2m+l}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{l-m}{2}\right) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2}\right) \tau^m \gamma^l}{2^{m+3l} \Gamma\left(\mu + \frac{2m+l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2m+l+1) \Gamma\left(\nu + \frac{l-m}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(-m+l+1) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(l+1)} \right] \times \\
& {}_1F_2\left(\mu + \frac{2m+l}{2}; \mu + \frac{2m+l}{2} + \frac{1}{2}, 2m+l+1; -\frac{1}{4}\right) \times \\
& {}_1F_2\left(\nu + \frac{l-m}{2}; \nu + \frac{l-m}{2} + \frac{1}{2}, -m+l+1; -\frac{1}{4}\right) {}_1F_2\left(\omega + \frac{l}{2}; \omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{1}{4}\right) + \\
& \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=l+1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^l \Gamma\left(\mu + \frac{2m+l}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{m-l}{2}\right) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2}\right) \tau^m \gamma^l}{2^{3m+l} \Gamma\left(\mu + \frac{2m+l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2m+l+1) \Gamma\left(\nu + \frac{m-l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(m-l+1) \Gamma\left(\omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(l+1)} \right] \times \\
& {}_1F_2\left(\mu + \frac{2m+l}{2}; \mu + \frac{2m+l}{2} + \frac{1}{2}, 2m+l+1; -\frac{1}{4}\right) \times \\
& {}_1F_2\left(\nu + \frac{m-l}{2}; \nu + \frac{m-l}{2} + \frac{1}{2}, m-l+1; -\frac{1}{4}\right) {}_1F_2\left(\omega + \frac{l}{2}; \omega + \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{1}{4}\right) \Big\}. \tag{9}
\end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} \frac{1}{\sqrt{(y+a)(y+b)}} \frac{1}{\sqrt{(z+a)(z+b)}} \times$

$$J_0\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}, \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(y+a)(y+b)}}, \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{(z+a)(z+b)}}; \tau, \gamma\tau\right) dx dy dz, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ :$$

Análogamente a las secciones anteriores y empleando en lugar de (6) el resultado [27, p. 286, No. (3.197.7)]

$$\int_0^\infty x^{\mu-\frac{1}{2}}(x+a)^{-\mu}(x+b)^{-\mu}dx = \sqrt{\pi}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{1-2\mu} \frac{\Gamma(\mu-\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu)}, \operatorname{Re}(\mu) > 0$$

se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} \frac{1}{\sqrt{(y+a)(y+b)}} \frac{1}{\sqrt{(z+a)(z+b)}} J_0\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}, \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(y+a)(y+b)}}, \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{(z+a)(z+b)}}; \tau, \gamma\tau\right) dx \, dy \, dz \\ & (\sqrt{\pi})^3 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=0}^m \left[\frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{2m+l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l}{2}\right) (\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3m-l} \tau^{-m} \gamma^{-l}}{2^{3m+l} \Gamma\left(\frac{2m+l}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma(2m+l+1) \Gamma\left(\frac{m-l}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma(m-l+1) \Gamma\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma(l+1)} \right] \times \\ & {}_1F_2\left(\frac{2m+l}{2}; \frac{2m+l}{2} + \frac{1}{2}, 2m+l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \times \\ & {}_1F_2\left(\frac{m-l}{2}; \frac{m-l}{2} + \frac{1}{2}, m-l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) {}_1F_2\left(\frac{l}{2}; \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \Bigg] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m+1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{2m+l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l-m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l}{2}\right) (\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-m-3l} \tau^{-m} \gamma^{-l}}{2^{m+3l} \Gamma\left(\frac{2m+l}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma(2m+l+1) \Gamma\left(\frac{l-m}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma(-m+l+1) \Gamma\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma(l+1)} \right] \times \\ & {}_1F_2\left(\frac{2m+l}{2}; \frac{2m+l}{2} + \frac{1}{2}, 2m+l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \times \\ & {}_1F_2\left(\frac{l-m}{2}; \frac{l-m}{2} + \frac{1}{2}, -m+l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) {}_1F_2\left(\frac{l}{2}; \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \Bigg] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2m} \left[\frac{(-1)^{m+l} \Gamma\left(\frac{2m-l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l}{2}\right) (\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3m-l} \tau^{-m} \gamma^l}{2^{3m+l} \Gamma\left(\frac{2m-l}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma(2m-l+1) \Gamma\left(\frac{m+l}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma(m+l+1) \Gamma\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma(l+1)} \right] \times \\ & {}_1F_2\left(\frac{2m-l}{2}; \frac{2m-l}{2} + \frac{1}{2}, 2m-l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \times \\ & {}_1F_2\left(\frac{m+l}{2}; \frac{m+l}{2} + \frac{1}{2}, m+l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) {}_1F_2\left(\frac{l}{2}; \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \Bigg] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=2m+1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{-m} \Gamma\left(\frac{l-2m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l}{2}\right) (\sqrt{a}+\sqrt{b})^{m-3l} \tau^{-m} \gamma^l}{2^{-m+3l} \Gamma\left(\frac{l-2m}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma(-2m+l+1) \Gamma\left(\frac{m+l}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma(m+l+1) \Gamma\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma(l+1)} \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& {}_1F_2\left(\frac{l-2m}{2}; \frac{l-2m}{2} + \frac{1}{2}, -2m+l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \times \\
& {}_1F_2\left(\frac{m+l}{2}; \frac{m+l}{2} + \frac{1}{2}, m+l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) {}_1F_2\left(\frac{l}{2}; \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \Bigg] + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{2m} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{2m-l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3m-l} \tau^m \gamma^{-l}}{2^{3m+l} \Gamma\left(\frac{2m-l}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2m-l+1)\Gamma\left(\frac{m+l}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(m+l+1)\Gamma\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(l+1)} \times \right. \\
& {}_1F_2\left(\frac{2m-l}{2}; \frac{2m-l}{2} + \frac{1}{2}, 2m-l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \times \\
& {}_1F_2\left(\frac{m+l}{2}; \frac{m+l}{2} + \frac{1}{2}, m+l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) {}_1F_2\left(\frac{l}{2}; \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \Bigg] + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=2m+1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{l-2m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{m-3l} \tau^m \gamma^{-l}}{2^{-m+3l} \Gamma\left(\frac{l-2m}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(-2m+l+1)\Gamma\left(\frac{m+l}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(m+l+1)\Gamma\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(l+1)} \times \right. \\
& {}_1F_2\left(\frac{l-2m}{2}; \frac{l-2m}{2} + \frac{1}{2}, -2m+l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \times \\
& {}_1F_2\left(\frac{m+l}{2}; \frac{m+l}{2} + \frac{1}{2}, m+l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) {}_1F_2\left(\frac{l}{2}; \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \Bigg] + \\
& \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left[\frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{2m+l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l-m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-m-3l} \tau^m \gamma^l}{2^{m+3l} \Gamma\left(\frac{2m+l}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2m+l+1)\Gamma\left(\frac{l-m}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(-m+l+1)\Gamma\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(l+1)} \times \right. \\
& {}_1F_2\left(\frac{2m+l}{2}; \frac{2m+l}{2} + \frac{1}{2}, 2m+l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \times \\
& {}_1F_2\left(\frac{l-m}{2}; \frac{l-m}{2} + \frac{1}{2}, -m+l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) {}_1F_2\left(\frac{l}{2}; \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \Bigg] + \\
& \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=l+1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{2m+l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3m-l} \tau^m \gamma^l}{2^{3m+l} \Gamma\left(\frac{2m+l}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2m+l+1)\Gamma\left(\frac{m-l}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(m-l+1)\Gamma\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(l+1)} \times \right.
\end{aligned}$$

$${}_1F_2\left(\frac{2m+l}{2}, \frac{2m+l}{2} + \frac{1}{2}, 2m+l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \times \\
 {}_1F_2\left(\frac{m-l}{2}, \frac{m-l}{2} + \frac{1}{2}, m-l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) {}_1F_2\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2} + \frac{1}{2}, l+1; -\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\right) \Bigg\}. \quad (10)$$

Agradecimiento

El autor agradece al CONDES-Universidad del Zulia por el soporte financiero.

Referencias Bibliográficas

1. Galué, L., Khajah, H. G. and Kalla, S.L., Multiplication theorems for generalized and double-index Bessel functions, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 118, No. 1-2, (2000), 143-150.
2. Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G., Richetta, M. and Torre, A., Advances on the theory of generalized Bessel function and applications to multiphoton processes, Journal of Scientific Computing, Vol. 8, No. 1, (1993), 69-109.
3. Reiss, H. R. and Krainov, V. P., Generalized Bessel functions in tunneling ionization, Journal of Physics Mathematical and General, Vol. 36, No. 20, (2003), 5575-5585.
4. Dattoli, G., Giannessi, L., Mezi, L. and Torre, A., Theory of generalized Bessel functions, Journal II Nuovo Cimento, Vol. 105, No. 3, (1990), 327-348.
5. Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G. and Torre, A., Generalized Bessel functions of the Anger type and applications to physical problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 184, No. 2, (1994), 201-221.
6. Paciorek, W. A. and Chapuis, G., Generalized Bessel functions in incommensurate structure analysis, Foundations of Crystallography, Vol. 50, No. 2, (1994), 194-203.
7. Castillo, G. y Galué, L., Integrales que involucran funciones de Bessel de dos índices y un parámetro, Revista de la Academia Canaria de Ciencias, Vol. XXI, No. 1-2, (2009), 83-94.
8. Castillo, G. y Galué, L., Teoremas para funciones de Bessel de dos índices y un parámetro, Revista Colombiana de Matemáticas, Vol. 44, No. 1, (2010), 65-78.
9. Castillo, G. y Galué, L., Algunos resultados sobre las funciones de Bessel de dos índices y un parámetro, Revista Tecnocientífica URU, Vol. 1, (2011), 59-71.
10. Chiccoli, C., Dattoli, G., Lorenzutta, S., Maino, G. and Torre, A., Theory of one-parameter generalized Bessel functions, Quaderni del Gruppo Nazionale per l'Informatica Matematica del CNR, Vol. 1, (1992), 1-47.
11. Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G., Dattoli, G. and Torre, A., Generalized Bessel functions: a group theoretic view, Reports on Mathematical Physics, Vol. 33, No. 1-2, (1993), 241-252.
12. Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G. and Torre, A., Generalized Bessel functions and generalized Hermite polynomials, Journal of Mathematics Analysis and Applications, Vol. 178, No. 2, (1993), 509-516.
13. Dattoli, G., Torre, A., Lorenzutta, S. and Maino, G., Generalized Bessel functions and Kapteyn se-

- ries, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 35, No. 8,(1993), 117-125.
14. Dattoli, G., Lorenzutta, S., Maino, G., Torre, A., Voykov, G. and Chiccoli, C., Theory of two-index Bessel functions and applications to physical problems, *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. 35, (1994), 3636-3649.
 15. Dattoli, G., Maino, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S. and Torre, A., A unified point of view on the theory of generalized Bessel functions, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 30, No. 7, (1995), 113-125.
 16. Dattoli, G., Torre, A., Lorenzutta, S. and Maino, G., Generalized forms of Bessel functions and Hermite polynomials, *Annals of Numerical Mathematics*, Vol. 2, (1995), 211-232.
 17. Dattoli, G., Torre, A. and Carpanese, M., The Hermite-Bessel functions: a new point of view on the theory of the generalized Bessel functions, *Radiation Physics and Chemistry*, Vol. 51, No. 3, (1998), 221-228.
 18. Dattoli, G., Ricci, P. E. and Pacciani, P., Comments on the theory of Bessel functions with more than one index, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 150, No. 3, (2004), 603-610.
 19. Galué, L., Evaluation of some integrals involving generalized Bessel functions, *Integral Transforms and Special Functions*, Vol. 12, No. 3, (2001), 251-256.
 20. Galué, L., Kapteyn series for generalized Bessel functions, *International Journal of Applied Mathematics*, Vol. 7, No. 2, (2001), 159-167.
 21. Galué, L. y Castillo, G., Representación integral de la función de Bessel de dos índices y un parámetro, *Revista Tecnocientífica URU*, Vol. 4, (2013), 23-32.
 22. Pathan, M. A., Goyal, A. N. and Shahwan, M. J. S., Lie-theoretic generating functions of multivariable generalized Bessel functions, *Reports on Mathematical physics*, Vol. 39, No. 2, (1997), 249-254.
 23. Prieto, A. I., Matera, J., Galué, L. y Salinas, S., Algunos resultados sobre la función de Bessel de tres variables, *Revista Tecnocientífica URU*, Vol. 6, (2014), 31-41.
 24. Olver, F. W., Lozier, D. W., Boisvert, R. F. and Clark, C. W., *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, London, (2010).
 25. Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, London, (1980).
 26. Lebedev, N. N., *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications Inc., New York, (1972).
 27. Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, (1965).

Índice acumulado

Nº 1 Julio - Diciembre 2011

Algunas series e integrales con funciones trigonométricas

Some series and integrals with trigonometric functions

Alfredo Villalobos y Glenny García

Control mediante interconexión y asignación de amortiguamiento del sistema mecánico subactuado TORA

Interconnection and damping assignment control of the subactuated TORA mechanical system

Atilio Morillo, Maribel Pérez Pirela, Miguel Ríos y Vivian Acosta

Algunos resultados que envuelven la función hipergeométrica de Wright y el cálculo fraccional

Some results involving fractional calculus and Wright's generalized hypergeometric function

Susana Salinas de Romero y Carlos Segundo Muñoz Valencia

Eficiencia del quitosano como coagulante durante el tratamiento de aguas de baja turbidez asociadas a la producción de petróleo

Efficiency of chitosan as coagulant during treatment of low turbidity water associated crude oil production

Yaxcelys Caldera, Yim Rodríguez, Hernando Oñate, Jhosana Prato y Edixon Gutiérrez

Quitina y Quitosano polímeros amigables. Una revisión de sus aplicaciones

Chitin and Chitosan friendly polymer. A review of their applications

Zulay Mármol, Gisela Páez, Marisela Rincón, Karelen Araujo, Cateryna Aiello, Cintia Chandler y Edixon Gutiérrez

Algunos resultados sobre la función de Bessel de dos índices y un parámetro

Some results on Bessel function of two indexes and one-parameter

Leda Galué y Greilyn Castillo

Generalización fraccional de la ecuación de Schrödinger relacionada a la Mecánica Cuántica

Fractional generalization of Schrödinger equation related to Quantum Mechanics

Shyam Kalla, Ram Kishore Saxena y Ravi Saxena

Nº 2 Enero - Junio 2012

Diseño de un equipo de desinfección por luz ultravioleta para el tratamiento de aguas residuales con fines de reutilización

Design of disinfection equipment for ultraviolet light to wastewater treatment with goals of reutilization

Mayra Sánchez, Nellimar Villalobos, Edixon Gutiérrez y Yaxcelys Caldera

Cinética de intercambio iónico bajo control mixto en medio lácteo

Ion exchange kinetics under mixed control in milk

Jorge Alaña, Karina Martínez, José González, Juan Hernández y César García

Contenido de fracciones orgánicas en aguas de producción de petróleo

Organic fractions in water from crude oil production

Edixon Gutiérrez, Yaxcelys Caldera, Leopoldo Ruesga, Cristina Villegas, Roscio Gutiérrez, Ninoska Paz, Edith Blanco y Zulay Mármol

Solitones topológicos: Cúmulos de energía

Topological solitons: Lumps of energy

Ramón J. Cova

Ingeniería Química: Historia y Evolución

Chemical Engineering: History and Evolution

Cateryna Aiello Mazzarri, Zulay Mármol y Araceli Sánchez de Puertas

Comparación de las propiedades que influyen en la combustión entre el fly ash, carbón y diferentes derivados del petróleo

Comparison of the properties that influence in the combustion among the fly ash, coal and different derived of the petroleum

Análí Machado, Cezar García, Yolanda Rincón, Neyma García, José González y Juan Hernández

Nitrobacterias en reactores biológicos rotativos de contacto (RBC) de tres cámaras bajo diferentes cargas orgánicas

Nitrobacteria in three stages rotating biological contactor (RBC) reactors under different organic loads

Julio César Marín, Evelín Castro, Elisabeth Behling, Gilberto Colina, Laugeny Díaz y Nancy Rincón

Generalización de los polinomios de Bernoulli de índice arbitrario complejo

Generalization of Bernoulli polynomials of arbitrary complex index

Ana Isolina Prieto, Josefina Matera, Susana Salinas de Romero y Marleny Fuenmayor

Nº 3 Julio - Diciembre 2012

Criterios para la gestión de los sistemas de inventarios

Criteria for management inventories systems

Alfredo Leal y Karim Oliva

Contenidos curriculares y rendimiento académico de los estudiantes en la Facultad de Agronomía de la Universidad del Zulia

Contents curriculares and academic performance of the students in the Faculty of Agronomy of the University of Zulia

Mary Isabel Urdaneta Portillo, Gladys Sarmiento, José Hernández y Jairo Fernández

Mínimos cuadrados parciales con el método de descenso de mayor pendiente

Partial least square with method of maximum gradient descent

Eddy Jackeline Rodríguez

Usabilidad de entornos virtuales 3D colaborativos en el proceso de enseñanza–aprendizaje

Usability of collaborative 3D virtual environments in the teaching-learning processes

Carlos Arrieta

Desinfección de aguas residuales de una industria avícola para su reutilización

Disinfection of poultry industry wastewater for reuse

Edixon Gutiérrez, Anna Travaglini, Giselle Uzcátegui y Yaxcelys Caldera

Estudio comparativo entre el método de Lemke y el método de los conjuntos activos para programación cuadrática

Comparative study between Lemke's method and the active set method for quadratic programming

Marihebert Leal, Kilkenis Fuenmayor, Javier Bastidas y Susana Salinas

N° 4 Enero - Junio 2013

Comunidades de práctica en la investigación universitaria

Communities of practice in the university research

Sergio de Pool

Representación integral de la función de Bessel de dos índices y un parámetro

Integral representation of the Bessel function of two indexes and a parameter

Leda Galué y Greilyn Castillo

Algunas propiedades de las N – Normas

Some properties of N – Norms

José Sarabia

Biodegradación de queroseno por cultivos de bacterias aisladas de una fosa petrolera en Venezuela

Kerosene biodegradation by bacterial cultures isolated from oil pit in Venezuela

Laugeny Díaz, Beltrán Briceño, Mónica García, Néstor Rosales, Julio Marín, Cateryna Aiello y Ever Morales.

Factibilidad de inserción del Transmilenium como solución a la situación actual del sistema de transporte público de la ciudad de Maracaibo

Feasibility study of the Transmilenium like a solution to the actual public transport situation in the Maracaibo city

Angi Rojas y Marco Hinder

Modelado del secado en capa fina y del presecado al sol a diferentes alturas de la capa de la Lemna obscura del Lago de Maracaibo

Modeling of the thin layer drying and solar predrying at the different layer thicknesses of the Lemna obscura from Maracaibo Lake

Leobaldo Suárez, Alexis Faneite y Alexis Ferrer

Algunos resultados de la subordinación diferencial de Briot – Bouquet de funciones analíticas

Some results on Briot – Bouquet differential subordination of analytic functions

Alka Rao y Shyam Kalla

Nº5 Julio - Diciembre 2013

Biblioteca de diferenciación automática para la máquina virtual de Java

Automatic differentiation library for the Java virtual machine

María E. Portillo Montiel, Nelson Arapé, Gerardo Pirela Morillo

Eficiencia de las semillas Moringa oleifera como coagulante orgánico en la remoción de metales en aguas de baja turbiedad

Efficiency of the moringa oleifera seeds as organic coagulant for metal removal in low turbidity wastewaters

Marielba Mas y Rubí, Sedolfo Carrasquero, Daimarys Martínez, Donaldo Gabriel Mejías, Luis Vargas

Evaluación de la recuperación de vanadio y níquel por lixiviación ácida de las cenizas volantes del aceite combustible

Evaluation of the recovery of vanadium and nickel by acid leaching from oil fly ash

César García, Roselis Rosales, Bianca Feijoo, Juan Hernández, José González, Gabriela Carruyo

Influencia de la relación de aspecto de la geometría vertical en el comportamiento estructural de edificaciones aporticadas de concreto armado

Influence of the aspect ratio of vertical geometry on the structural behavior of framed reinforced concrete...

Oswaldo J. Russián A., Víctor R. Salazar V., Gerardo J. Gutiérrez D.

Análisis numérico computacional de la distribución de temperaturas en una barra

Computational numerical analysis for the temperatures distribution in a bar

Alfredo Villalobos, Antonio Quintero

Validación de un método cromatográfico para la determinación de vitamina A en muestras de leche /

Validation of a chromatographic method for the determination of vitamin A in milk samples

Karelen Araujo, Gisela Páez, Zulay Mármol, Elsy Arenas, Ana Cáceres, Cateryna Aiello Mazzarri

Nº 6 Enero - Junio 2014

Sobre una generalización de la función hipergeométrica de Gauss

On one generalization of the Gauss' hypergeometric function

Nina Virchenko

Representación integral de las $E_{\alpha, \beta}$ - funciones de onda

Iryna Alexsandrovich, Nina Virchenko

Algunos resultados sobre la función de Bessel de tres variables

Some results on Bessel function of three variables

Ana Isolina Prieto, Josefina Matera, Leda Galué, Susana Salinas

Integrales y ecuación diferencial que involucran la función de Wright

Integrals and differential equations involving Wright functions

Susana Salinas de Romero, Daniel Meza, Marleny Fuenmayor

Desigualdades integrales fraccionales y sus q-análogos

On fractional integral inequalities and their q-analogues

Sunil Dutt Purohit, Faruk Uçar, R.K. Yadav

Una nueva clase de polinomios q-Apostol-Bernoulli de orden α

A new class of q-Apostol-Bernoulli polynomials of order α

Mridula Garg, Subhash Alha

Algunos resultados que involucran operadores q-integrales fraccionales generalizados de Erdélyi-Kober

Some results involving generalized Erdélyi-Kober fractional q-integral operators

Leda Galué

Revisión de la teoría de Boehmians

Boehmians revisited

P. K. Banerji, Deshna Loonker

Algunas propiedades de las N-normas (II)

Some properties of N-norms (II)

José A. Sarabia R.

Nº 7 Julio - Diciembre 2014

Fermentación en estado sólido: Una alternativa biotecnológica para el aprovechamiento de desechos agroindustriales

Solid state fermentation: A biotechnological alternative for exploitation of agroindustrial wastes

José R. Ferrer G, José L. Machado, Jhanna Brieva

Propuesta de un sistema de seguridad residencial inalámbrico basado en instrumentación virtual

Proposal for a wireless home security system based on virtual instrumentation

Gereli de los Ángeles Gutiérrez Finol

Sistema de facturación vehicular en peajes basado en tecnología de identificación por radio frecuencia (RFID)

Vehicular toll collection system based on radio frequency identification technology (RFID)

Angel D. Larreal M., Georma P. Marachli M.

Determinación del grado de conversión global del jugo de piña en etanol por medio de la fermentación alcohólica

Determination of the conversion degree of pineapple juice through alcoholic fermentation

Briceida C. Fernández A., Maite V. Gómez S., José R. Ferrer G, Marisela Rincón

Modelo matemático para la evaluación de parámetros hidráulicos de un reactor anaerobio de flujo ascendente a escala piloto (RAFAep)

Mathematical model for evaluating parameters of a hydraulic upflow anaerobic reactor pilot scale (RAFAep)

Gabriel Arguello, Gerardo Aldana, Jhonny Perez

Dispersión gelatinosa de huesos bovinos para la clarificación de aguas con baja turbidez

Bovine bone gelatinous dispersion for clarification of water with turbidity low

Lorena Fuentes, Yolimar Aguilar, Yaxcelys Caldera, Iván Mendoza

Nanocompuestos basados en arcilla y mezclas heterogéneas de termoplásticos. Una revisión

Nanocomposites based on clay and heterogenous blends of thermoplastics. A review

Helen Inciarte, Haydée Oliva

N° 8 Enero - Junio 2015

Análisis, diseño y simulación del sistema subactuado Pendubot

Analysis, design and simulation of Pendubot subactuated mechanical systems

Atilio Morillo y Maribel Pérez Pirela

Remoción de arsénico presente en oil fly ash por lixiviación ácida

Arsenic removal from oil fly ash by acid leaching

José González, Julissa Arguelles, Milagros Ojeda, Juan Hernández, Gabriela Carruyo y Cezar García

Sistema de control en modo deslizante para regular la posición y la velocidad de un motor de corriente directa

Sliding mode control to regulate the speed and position of a motor of direct current

Ernesto Cornieles y Jacobo Ramírez

Evaluación fisicoquímica y fitoquímica de Granada (*Punica granatum* L.)

Evaluation of physical and phytochemical properties of the granada (*Punica granatum* L.)

Johana Raga, Zulay Marmol, Evelyn Pérez, Gisela Páez y Karelen Araujo

Cuantificación y caracterización de los residuos de alimentos del Comedor Central Estudiantil de la Universidad del Zulia

Quantification and characterization of food residues from the Student Central Dinning of the University of Zulia

Karina Martínez, John Sánchez, Yuleidi Raga, Zulay Marmol, Elsy Arenas y Cateryna Aiello

Modelado de problema de regresión lineal con método Cuasi-Newton

Modeling linear regression problem with Quasi-Newton method

Eddy Rodríguez

Efecto de las condiciones de hidrofobización de una arcilla natural sobre su distribución y dispersión en mezclas de poliestireno/polibutadieno/estireno

Effect of the hydrophobization conditions of natural clay on its distribution and dispersión in polystyrene/polybutadiene/styrene blends

Ida González, Haydee Oliva, Ysabel Cedeño, Helen Inciarte, Diana Soto y Eliezer Velásquez

Estudio del comportamiento de las redes sónicas de alta velocidad

Study of performance of the sonic high speed networks

Luis Rojas

Nº 9 Junio - Diciembre 2015

Onda de propagación TE en una microcinta abierta con dos dieléctricos TE propagation wave in an open microstrip with two dielectrics <i>Augusto Galo.</i>	11
Lixiviación diferenciada de metales mayoritarios de cenizas volantes. Differentiated leaching of majoritarian metales from fly ash <i>Juan Hernández, José González, Gabriela Carruyo y Cezar García.</i>	19
Control y telemanipulación a distancia de un sistema multivariable. Control and remote accessing of a multivariable system <i>Ernesto Cornieles, German Gutiérrez y Jacobo Ramírez.</i>	33
Aprendizaje constructivista para el análisis de estructuras mediante el uso de un entorno virtual. Constructivist learning for the analysis of structures by using a virtual environmental. <i>Evelyn Marín</i>	41
Análisis de la emisión y dispersión del dióxido de nitrógeno en un sector de alto flujo vehicular. Analysis of the emission and dispersion of nitrogen dioxide in areas of high vehicular traffic. <i>Alberto Córdova, Anali Machado, Neyma Garcia, Gilberto Colina y Cezar García.</i>	51
Teorema para la función de Bessel generalizada que involucran polinomios de Hermite. Theorems for the generalized Bessel function that involving Hermite polynomials. <i>Josefina Matera, Ana Isolina Prieto, Leda Galué y Susana Salinas de Romero.</i>	61
Aporte nutricional de un biosólido avícola obtenido en un proceso de digestión aerobia sobre un cultivo de cebollín. Nutritional contribution of a poultry biosolids obtained in a process of aerobic digestion on the growing of green onion. <i>Leopoldo Ruesga, María Ocando, Miguel López, Enyris Gutiérrez, Yaxcelys Caldera y Edixon Gutiérrez.</i>	71
Opuntia ficus-indica y Opuntia wentiana: estudio comparativo sobre su efectividad como coagulantes en la clarificación del agua. Opuntia ficus-indica and Opuntia wentiana: comparative study on its effectiveness as a coagulant in water clasification. <i>Yوالis González, Lorena Fuentes, Ivana Mendoza y Yaxcelys Caldera.</i>	81

N° 10 Enero - Junio 2016

Implementación de un plan de mantenimiento predictivo basado en el análisis de velocidades centrifugas de compresores.

Implementation of predictive maintenance plan based on analysis of speed centrifugal compressor.

Kenneth Rosillon y Oscar Aguillar

Accidente: Fenómeno Estocástico.

Accident: Stochastic Phenomena.

José Vicente Ferrer y Naudy Leal.

Categorización de usuarios de Twitter.

Categorizing Twitter users.

Fracisco Luengo, Carla Morillo y Yaskelly Yedra.

Uso del Wxmaxima en la enseñanza de la ecuación integral de Fredholm de segunda especie.

Use of Wxmaxima on teaching the Fredholm integral equation of second order.

Jhonny Araque, Robert Quintero y Oscar León.

Modelo diferencial de transferencia de masa para el análisis de la lixiviación ácida del oil fly ash.

Differential mass transfer model for the analysis of the acid leaching of oil fly ash.

Juan Hernández, José González, Gabriela Carruyo y Cezar García.

Integrales que involucran funciones de Bessel de tres variables y dos parámetros.

Integrals involving Bessel functions of three variables and two parameters.

Leda Galué.

Normas para la presentación de artículos

1. La Revista Tecnocientífica URU es una revista digital arbitrada de la Universidad Rafael Urdaneta cuyo propósito es dar a conocer trabajos científicos originales e inéditos en las áreas de Ingeniería (Química, Civil, Eléctrica, Computación, Telecomunicaciones, Industrial y Producción Animal, entre otras).
2. **Tipos de trabajos**

Se aceptaran para la publicación artículos científicos inéditos, esto es, que no hayan sido enviados o publicados en otro órgano de divulgación científica con anterioridad, con un máximo de quince (15) páginas y escrito en MICROSOFT OFFICE WORD. Se deben consignar tres copias y un CD-ROM del artículo.

 - 2.1 Artículos de actualización científica que resuman el “Estado del Arte” de las áreas de la revista, con un máximo de quince (15) páginas.
 - 2.2 Artículos de reflexión sobre un tema específico de las áreas de la revista, desde una perspectiva analítica, interpretativa o crítica del autor, recurriendo a fuentes originales.
 - 2.3 Artículos de revisión: documentos donde se analizan, sistematizan e integran los resultados de investigaciones, publicadas o no, sobre una temática especializada de las áreas de la revista.
 - 2.4 Artículos de discusión: documentos que presentan el debate de afirmaciones realizadas en artículos anteriores.
 - 2.5 Artículos de invitados especiales con un máximo de quince (15) páginas.
 - 2.6 Notas técnicas: sobre mejoras de procesos en ingeniería, resultados de investigaciones derivadas del ejercicio profesional en ingeniería y ciencias afines, con un máximo de ocho (8) páginas.
3. **La portada debe contener**
 - 3.1 Título del trabajo en español e inglés en letras mayúsculas y minúsculas.
 - 3.2 Nombre(s) del autor(s), 6 autores como máximo y su dirección institucional(es) completa(as) (dirección postal, correo electrónico).
 - 3.3 Resumen del trabajo en español e inglés (abstrac) con un máximo de doscientas (200) palabras.
 - 3.4 Palabras clave en español e inglés (key words) con un máximo de cinco (05) palabras.
4. **Normas de estilo**
 - 4.1 El orden a seguir para el artículo es: portada, resumen (en español e inglés), introducción, fundamentos teóricos, parte experimental, resultados, discusión de resultados, conclusiones, agradecimiento y referencias bibliográficas.
 - 4.2 El artículo debe escribirse en estilo Times New Roman tamaño 12, el título tamaño 16 y las figuras, tablas y texto subordinados tamaño 10.
 - 4.3 El interlineado debe ser doble espacio a excepción del resumen, agradecimiento y referencias bibliográficas que van a un espacio.
 - 4.4 El nombre de cada sección se escribirá en negritas. Estos deberán estar centrados.
 - 4.5 El nombre de las subsecciones se escribirá en negritas a la izquierda del texto y en mayúsculas y minúsculas.

- 4.6 Las figuras, fotografías, diagramas y gráficos deben denominarse como figuras y estas deben ir numeradas con números arábigos, así como las tablas. Además, deben incluirse dentro del texto correspondiente y con su respectiva leyenda.
- 4.7 La redacción de los trabajos puede ser en español o inglés.
- 4.8 Las fotografías, imágenes, mapas y figuras incluidas en el documento se anexaran también por separado en el CD-ROM con excelente calidad.
- 4.9 Las fotografías deben estar en blanco y negro, bien contrastadas y brillantes de un ancho máximo de 9,5cm.
- 4.10 Todos los símbolos matemáticos deben ser escritos en forma clara y legible, con los subíndices y superíndices ubicados correctamente.
- 4.11 Deben ser numeradas todas las ecuaciones matemáticas en forma consecutiva con números arábigos entre paréntesis y ubicados en el margen derecho.
- 4.12 Las citas dentro del documento se escriben con el nombre de sus autores seguido con un número entre corchetes que corresponde a la referencia.
Ejemplo: García [1], L Moreno [3, Pág. 19-24] o ubicando el número de la referencia sin colocar autor [4], si son 3 o más autores se escribe K. Nishimoto et al. [2].
Las referencias bibliográficas de artículos de revistas deben contener autor(es) si tiene varios autores separarlos con comas, título de la revista, volumen y número, año de publicación (entre paréntesis) y páginas. Solo deben incluirse referencias bibliográficas con autores totalmente identificados y se escribirán por orden de aparición de las citas.
Ejemplo: García C., Marín j., Alaña J., Martínez K. y Faria J., Modelo de Nernst-Planck aplicado a la cinética de intercambio iónico del sistema $\text{PO}_4(-3)$ - $\text{Cl}(-1)$ en leche, Rev. Tec. Ing. Univ.Zulia, Vol. 30, N°. 3, (2007), 236-243.
Los libros se escriben: apellido e inicial del autor(es) con mayúsculas y minúsculas.
Ejemplo: Nishimoto K. (Editor), Fractional Calculus and its Applications, Nihon University, Tokyo (1990).
- 4.13 En los artículos deben emplearse unidades del Sistema Internacional: metro (m), kilogramos (Kg), Segundo (s), entre otras.

5. Arbitraje

- 5.1 El trabajo, recibido por el Editor(a), será enviado al Comité Editorial para su revisión y consideración de tres árbitros.
- 5.2 El método de arbitraje que sigue la revista es de tipo “doble ciego”, que consiste en que tanto los árbitros como los autores desconocen sus respectivas identidades.
- 5.3 Los trabajos serán evaluados de acuerdo a los siguientes criterios: claridad, originalidad del contenido, aportes al campo de conocimiento, coherencia del discurso, adecuada organización interna, calidad de las referencias bibliográficas, adecuada elaboración del resumen y pertinencia del título.
- 5.4 En caso de recibir observaciones por parte de los árbitros, estas serán enviadas al(los) autor(es) para su corrección. Después de realizar las correcciones, los autores devolverán la versión corregida en un CD-ROM, así como un original impreso y tres copias.
- 5.5 Las pruebas de imprenta serán enviadas a los autores para la revisión final del artículo.
- 5.6 Cuando el trabajo sea aceptado los autores serán informados del tiempo aproximado de publicación. Si el trabajo es rechazado los autores podrán remitir al Editor(a) Jefe una comunicación exponiendo argumentos a favor de su artículo. El Comité Editorial considerará las acciones a tomar.
- 5.7 Cada autor principal de los artículos publicados recibirá gratuitamente una (1) revista y cinco (5) separatas.

6. Consideraciones finales

- 6.1 Los conceptos u opiniones emitidos en los artículos, serán de exclusiva responsabilidad de los autores.
- 6.2 El Comité Editorial se reserva el derecho de los arreglos de estilo que considere conveniente.
- 6.3 Bajo ninguna circunstancia, la revista devolverá los originales (Impreso y CD-ROM) de los artículos enviados par su consideración.
- 6.4 Lo no previsto en las presentes normas será resuelto por el Comité Editorial.

Guidelines for Submitting Articles

1. URU techno-scientific journal is an arbitrated digital journal of the Rafael Urdaneta University, whose purpose is to publish scientific papers in the areas of engineering (Chemical, Civil, Electrical, Computer, Telecommunications, Industrial, Animal Production, etc.).

2. Types of articles

Articles will be accepted for publication which have not been submitted or published in other scientific journals, and should have a maximum of fifteen (15) pages, and written in MICROSOFT OFFICE WORD. Three copies should be submitted along with a CD-ROM containing the article.

- 2.1 Scientific articles that summarize the "state of the art " in areas of interest for the journal with a maximum of fifteen (15) pages.
- 2.2 Reflection articles on specific issues covered by the magazine, from an analytical, interpretative or critical viewpoint of the author, and based on original sources.
- 2.3 Review articles which analyze, systematize and integrate results, published or unpublished, on specific issues covered by the magazine.
- 2.4 Discussion articles: A document that presents the debate of assertions published in previous articles.
- 2.5 Articles by special guests with a maximum of fifteen (15) pages long.
- 2.6 Technical notes on process improvements in engineering, results of research obtained from professional practice in engineering and related fields, with a maximum of eight (8) pages.

3. The front page must contain

- 3.1 Title of paper in English and Spanish, in uppercase and lowercase letters.
- 3.2 Author's name , maximum of 6 authors and full institutional address or addresses (postal address, e-mail).
- 3.3 Abstract in Spanish and English with a maximum of two hundred (200) words.
- 3.4 Key words in Spanish and English with a maximum of five (5) words.

4. Text guidelines

- 4.1 The sequence for the article should be as follows: title, abstract (in English and Spanish), introduction, theoretical foundations, experimental part, and discussion of results, conclusions, acknowledgements and references.
- 4.2 Article should be written in 12 point Times New Roman, and 16 point for the title, and figures, tables and subordinate text should use 10 point. Interlining should be double space; abstract, acknowledgments and references should be single space.
- 4.3 The heading of each section should be centered and written in boldface letters.
- 4.4 Subsections headings should be written in boldface letters on the left of text and in upper and lower case letters.
- 4.5 Figures, photographs, diagrams and charts should be labeled as figures, and numbered with Arabic numerals, as well as tables. They should be included within the corresponding text along any explanation.
- 4.6 The article draft should be in Spanish or English.
- 4.7 Photographs, images and figures included in the document should be annexed separately on a CD-ROM of excellent quality.

- 4.8 Photographs must be in black and white, with good contrast and brightness, with a maximum width of 9.5 centimeters.
- 4.9 Mathematical symbols should be written clearly and legibly, with subscripts and superscripts correctly located.
- 4.10 Mathematical equations should be numbered sequentially with Arabic numerals within parentheses and placed on the right margin.
- 4.11 Quotations within the document should be written with the author's name followed with a number inside brackets that corresponds to the reference. Examples: García [1], L. Moreno [3, pages 19-24] or, if there are three or more authors, the reference number without the author's name [4], and written as K.Nishimoto et al. [2].
- 4.12 Bibliographic references to journal articles should include author (s) name (s); if it has multiple authors, their names should be separated by commas, title of journal, volume and number, year of publication (in parentheses) and page numbers. Bibliographical references should be included only when authors are fully identified and they will be written in order of appearance of the quote. Example: Garcia C., Marin J., Alaña J., Martinez K y Faria J., Model of Nernst-Planck applied to the ion exchange kinetics of the PO₄ (-3)-Cl(1) system in milk, Rev. Tec. Ing. Univ. Zulia, vol. 30, N° 3, (2007), 236-243.
Books references should be written: surname and initial of the author (s) name (s) in uppercase and lowercase letters.
Example: Nishimoto K. (editor), Fractional calculus and its applications, Nihon University, Tokyo (1990).
- 4.13 Articles should use the International System Units: meter (m), kilogram (kg), second (s).

Evaluation

- 5.1 Articles received by the Editor (s) will be submitted to the Editorial Committee for review and consideration of three arbitrators.
- 5.2 The evaluation method followed by the Journal is of the "double blindness" type; neither the arbitrators nor the authors know their respective identities.
- 5.3 The works submitted will be evaluated according to the following criteria: clarity of language, originality of contents, contributions to the field of knowledge, coherence, adequate internal organization and quality of bibliographic references, appropriate elaboration of the abstract and relevance of title.
- 5.4 In case of observations from the referees, these will be forwarded to the author (s) for corrections. After making corrections, the authors should return the corrected version on a CD-ROM, as well as an original of the reviewed work and three copies.
- 5.5 Press proof will be sent to authors for final review of the article.
- 5.6 When the work is accepted, authors will be informed of the approximate date of publication. If the work is rejected, the author may submit a communication to the Editor in Chief presenting his arguments in favor of the article. The Editorial Committee will consider the actions to take.
- 5.7 Each author will receive one (1) free copy of the journal volume and 5 reprints.

Final considerations

- 6.1 Concepts or opinions expressed in articles shall be the sole responsibility of the authors.
- 6.2 The Editorial Committee reserves the right for any format changes that considers convenient.
- 6.3 Under no circumstances, the magazine will return the original of the articles (print and CD-ROM) submitted for consideration.
- 6.4 Questions not answered by these guidelines shall be resolved by the Editorial Committee.

Revista Tecnocientífica URU N° 11
Maracaibo, Venezuela