Revista Tecnocientífica URU
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
No. 13 Julio - Diciembre 2017
Depósito Legal: PPI 201402ZU4464
ISSN: 2343-6360

Topología de Zariski y A-transformaciones

Edixo Rosales
Facultad Experimental de Ciencias. Universidad del Zulia.
Facultad de Ingeniería. Universidad Rafael Urdaneta.

Recibido: 13-02-2017 Aceptado: 19-09-2017

Resumen

Este trabajo estudia la regularidad Von Neumann de anillos conmutativos con unidad, a partir de la teoría de las **A**-transformaciones.

Palabras clave: Regularidad Von Neumann, **A**-transformaciones, Topología de Zariski.

Topology of Zariski and A-transformations

Abstract

This work studies the regularity Von Neumann conmmutative rings whith unity, from the theory of A-transformations.

Keywords: Regularity Von Neumann, A-transformations, Topology of Zariski.

Introducción

Consideremos un anillo conmutativo con identidad A, es conocido que $X = Spect(A)$, constituido por los ideales primos del anillo, forman un espacio topológico compacto, donde la familia de abiertos fundamentales, la determinan los $X_r = \{P \in X : r \notin P\}$, para cada $r \in A$. La topología τ, determinada sobre X por la familia $\{X_r\}_{r \in A}$, se le llama la topología de Zariski del espectro primo del anillo R. El espacio topológico (X, τ) generalmente no es de Hausdorff.

Un anillo conmutativo con identidad A, es regular de Von Neumann, si dado $a \in A$, existe $b \in A$, tal que $a = ab^2$. El espacio topológico $(Spect(A), \tau)$ es Hausdorff, si sólo si, A es anillo regular de Von Neumann; de allí su importancia para nosotros.

Si $f : A \to B$ es un morfismo entre anillos conmutativos con identidad, la aplicación $f^* : Spect(B) \to Spect(A)$, definidas por $f^*(P) = f^{-1}(P)$ para cada $P \in Spectr(B)$ es continua. Muchas propiedades topológicas importantes tiene, de acuerdo a la naturaleza del morfismo $f : A \to B$. La referencia $[1]$ contiene un estudio detallado y profundo sobre este tipo de aplicaciones.

Este trabajo tiene de alguna manera interés en caracterizar anillos regulares de Von Neuman, a partir de familia de aplicaciones continuas $f_i^* : Spect(R) \to Spect(R_i)$, asociadas a anillos regulares Von Neumann R_i.

Topología de Zariski y A-transformaciones

Sean R, R_i anillos conmutativos con identidad y $\{f_i : R_i \to R\}$ una familia de morfismos de anillos. Si consideramos $X_i = Spect(R_i)$, $X = Spect(R)$ y sus respectivas topologías de Zariski τ_i, τ; sabemos que las funciones $f_i^* : X \to X_i$, definidas por $f_i^*(P) = f^{-1}(P)$ para cada $P \in X_i$, forman una familia de funciones continuas. Llamemos $A = \{f_i^* : X \to X_i\}$.

Vamos a suponer que cada (X_i, τ_i) es un espacio de Hausdorff, el cual se cumple particularmente si R_i es un anillo regular de Von Neumann. Se dice que $\{P_d\}_{d \in D}$ (donde D es un conjunto dirigido) es una A-red, si $\mathrm{P_d} \xrightarrow{\tau_i} Q_i$, para cada. Es decir, $(\mathrm{X}_i)_r$ dado un entorno fundamental de $\mathrm{Q_i}$, existe $\mathrm{j_0} \in \mathrm{D}$ tal que, $f_i^*(P_j) = f^{-1}(P_j) \in (\mathrm{X}_i)_r \Rightarrow r \notin f^{-1}(P_j)$, para todo $j \succ j_0$.

Se dice que las A-redes $\{P_d\}_{d \in D}$ y $\{P'_d\}_{d \in D}$ son equivalentes, si $\lim f_i^*(P_d) = \lim f_i^*(P'_d)$ para cada i. Denotaremos con Y, al conjunto de todas las clases de equivalencias dadas sobre las A-redes. Cada clase que determina $\{P_d\}_{d \in D}$, se escribirá mediante $\{\hat{P}_d\}_{d \in D}$. Es claro que si definimos por $\hat{f}_i^*(\{\hat{P}_d\}_{d \in D}) = \lim f_i^*(P_d)$, podemos dotar a Y de la topología débil inducida por la familia $\hat{A} = \{\hat{f}_i^* : Y \to X_i\}$. Tenemos que $(Y, \tau_d(\hat{A}))$ es un espacio de Hausdorff, donde $\tau_d(\hat{A})$ representa la topología débil antes mencionada.

Es conocido que la aplicación $e : (X, \tau_i) \to (Y, \tau_d(\hat{A}))$, definida de manera natural por:

$e(P) = \{\hat{P}\}$ es una aplicación continua y $\overline{e(x)}^{\tau_d(\hat{A})} = Y$.

Además que $e : (X, \tau_i) \to (Y, \tau_d(\hat{A}))$ es una inmersión, si y sólo si, la familia $A = \{f_i^* : X \to X_i\}$ es separadora de puntos. Las propiedades topológicas de las **A-**transformaciones pueden ser estudiadas en [2]. Como e es continua y X es compacto, $e(X)$ es compacto; y al ser $(Y, \tau_d(\hat{A}))$ un espacio de Hausdorff, tenemos que $e(X)$ es cerrado y por lo tanto $e(X) = Y$.

El siguiente resultado es importante:

Lema 1: Sea $f : (X, \tau) \to (W, \gamma)$ una aplicación continua entre espacios topológicos que es inyectiva: (1) Si (W, γ) es Hausdorff, entonces (X, τ). (2) Si (X, τ) es compacto, $\tau = \tau_d(\{f\})$ y (W, γ) es Hausdorff, localmente compacto y totalmente disconexo; entonces (X, τ) es localmente compacto y totalmente disconexo.

Demostración. (1) Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como $f(x) \neq f(y)$, existen abiertos $U, V \in \gamma$, tales que $f(x) \in U$, $f(y) \in V$ y $U \cap V = \varnothing \Rightarrow \mathrm{f}^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$. Se deduce el resultado.

(2) Veamos que (X,τ) es localmente compacto. Sea $x \in X$ y $U \in \tau$ con $x \in U$. Existen $V_i \in \gamma$, tales que $x \in f^{-1}(V_1) \cap ... \cap f^{-1}(V_n)$; luego $f(x_i) \in V_i$ y por lo tanto existe W_i entorno compacto de $f(x_i)$. Por lo tanto $x \in f^{-1}(W_1) \cap ... \cap f^{-1}(W_n)$ cerrado dentro de un espacio de Husdorff y por lo tanto compacto. Es decir (X,τ) es localmente compacto de Hausdorff.

Para ver que X es totalmente disconexo, consideremos $x \in X$ y F un subconjunto cerrado de X, tal que $x \notin F$. Tenemos que $f(x) \notin f(F)$ y $f(F)$ es compacto y por lo tanto cerrado en W, ya que W es un espacio de Hausdorff. Como W es totalmente disconexo, existe un abierto-cerrado $U \in \gamma$, tal que $f(x) \in U$ con $f(F) \cap U = \emptyset$. Se deduce que $f^{-1}(U) \cap F = \emptyset$ con $f^{-1}(U)$ un entorno abierto-cerrado de x. Esto prueba la parte segunda del lema.

Teorema 1: Si $A = \{f_i^* : X \to X_i\}$ es separadora de puntos, entonces $\frac{R}{\sqrt{R}}$ es anillo regular de Von Neumann.

Demostración: En efecto, al ser la familia A separadora de puntos, tenemos que e es una inmersión y $e:(X,\tau_i) \to (Y,\tau_d(\hat{A}))$, un homeomorfismo. Por lo tanto (X,τ) es Hausdorff y como consecuencia, $\frac{R}{\sqrt{R}}$ es un anillo regular Von Neumann. Realmente $\tau = \tau_d(A)$,

Corolario 1: Si existe $f_j \in \{f_i : R_i \to R\}$, tal que $f_j : R_i \to R$ es un epimorfismo, entonces $\frac{R}{\sqrt{R}}$ es anillo regular de Von Neumann.

Demostración: En efecto, $f_j^* : X \to V(\ker f_j)$ es un homeomorfismo y por lo tanto $A = \{f_i^* : X \to X_i\}$ es separadora de puntos. Se aplica el teorema anterior.

Teorema 1: Sea $f : A \to B$ un morfismo entre anillos conmutativos con unidad y $A = \{f^* : Spect(B) \to Spect(A)\}$, tal que $(Spect(B), \tau_B)$ es Hausdorff. Si $e:(Spect(B),\tau) \to (Y,\tau_d(\hat{A}))$ es una inmersión, entonces $f^* : Spect(B) \to Spect(A)$ es inyectiva. Si además $\ker f \subset \sqrt{A}$, entonces $f^* : Spect(B) \to Spect(A)$ es un homeomorfismo.

Demostración: Al ser $e:(Spect(B), \tau) \to (Y,\tau_d(\hat{A}))$ una inmersión $A = \{f^* : Spect(B) \to Spect(A)\}$ es separadora de puntos, luego $f^* : Spect(B) \to Spect(A)$ es inyectiva. Si $\ker f \subset \sqrt{A}$, entonces $\overline{f(Spect(B))}^{\tau_A} = Spect(A)$ y como $(Spect(B), \tau_B)$ es Hausdorff, se tiene que $f^*(Spect(B)) = Spect(A)$ y por lo tanto, f^* es un homeomorfismo.

Finalizamos este trabajo con la siguiente observación:

Si (X,τ) es un espacio compacto de Hausdorff y $A = C(X)$ es el anillo de las funciones continuas reales sobre el compacto X, tenemos que $\hat{X}$ =Spect(Máx), el espectro máximal de A, lo constituyen los ideales máximales de $C(X)$, donde $m \in \hat{X}$, si y sólo si, $m = m_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0)\}$. Se conoce por el lema de Urison que τ viene determinada por los abiertos de la forma $U_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$

y en $\hat{X}$ podemos considerar la topología $\hat{\tau}$ determinada por la familia de abiertos $\hat{U}_f = \left\{ m \in \hat{X} : f \notin m \right\}$. La aplicación $\varphi : (X, \tau) \to (\hat{X}, \hat{\tau})$, definida mediante $\varphi(x) = m_x$ es un homeomorfismo entre estos espacios topológicos. Vale, por lo tanto, el siguiente resultado:

Teorema 2: Sea $f : A \to B$ un morfismo entre anillos conmutativos con unidad y $A = \{ f^* : Spect(B) \to Spect(A) \}$, tal que $(Spect(B), \tau_B)$ es Hausdorff.

Consideremos $\phi_1 : (Spect(B), \tau) \to (\hat{Spect}(B), \hat{\tau})$, definido por $\varphi_1(x) = m_x$ y $\varphi_2 : (Y, \tau_d(\hat{A})) \to (\hat{Y}, \tau_d(\hat{A}))$ definido por $\varphi_2(y) = m_y$. $\gamma : (\hat{Spect}(B), \hat{\tau}) \to (\hat{Y}, \tau_d(\hat{A}))$ dada por es un homeomorfismo, si y sólo si, $e : (Spect(B), \tau) \to (Y, \tau_d(\hat{A}))$ es una inmersión.

Demostración: Como $\gamma \circ \varphi_1(x) = \varphi_2(e(x)) \Rightarrow \gamma = \varphi_2 \circ e \circ \varphi_1$, de lo que se deduce lo pedido.

Referencias bibliográficas

[1].-Atiyah M. F. y Macdonald I.G: "Introducción al Algebra Conmutativa". Editorial Reverté, S. A., Barcelona. 1978.

[2].-Wu H.: "”Extension and new observations of Tychonoff,Stone Weirstrass Theorems, Compactifications and the Real Compactifications". Toplogy and its Aplications 16. 1983.