***Revista Tecnocientífica URU***
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
No. 11 Julio – Diciembre 2016
Depósito Legal: PPI 201402ZU4464
ISSN: 2343-6360

# Uso del Wxmaxima en la enseñanza de la ecuación integral de Fredholm de segunda especie

**Jhonny Araque, Robert Quintero y Oscar León**
Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería. Universidad del Zulia. Maracaibo, Estado Zulia, Venezuela
jhonnyaraque@gmail.com; robertqui@gmail.com; osluleongo93@gmail.com

Recibido: 02-02-2016. Aceptado: 29-11-2016.

**Resumen**

En este artículo se presenta el uso del paquete programable Wxmaxima como herramienta didácticapara la resolución de la ecuación integral de Fredholm de segundaespecie.El paquete permite, mediante el desarrollo de Taylor de dos variables, aproximar el núcleok(x,t) de la ecuación integral por un núcleo degenerado y, de esta manera, obtener la solución de forma algebraica. Se presentan algunos ejemplos en los cuales compara la solución obtenida usando Wxmaxima con la solución exacta y con la solución hallada mediante otros programas computacionales.

**Palabras clave:** Ecuación integral de Fredholm, núcleo degenerado, Wxmaxima.

# Use of Wxmaxima on teaching the Fredholm integral equation of second order

**Abstract**

In this paper the use of a programmable package Wxmaxima is presented as a teaching tool for the solution of the Fredholm integral equation of second order. The package allows to find an approximation of the core k (x,t) of the integral equation by a degenerate core and by this way to find the solution algebraically. Also, it is presented several examples by comparison between the solution through Wxmaxima with the exact solution and with others computer programs.

**Keywords:** Fredholm integral equation, degenerate core, Wxmaxima.

## Introducción

Durante las últimas décadas, el uso de las computadoras ha permitido a los profesionales de la ingeniería usar paquetes programables para evaluar diseños y elevar su desempeño en la toma de decisiones. En la enseñanza de la ingeniería, se usan algunos paquetes programables como el Matlab, el Maple, entre otros, para que el estudiante pueda empezar a razonar sobre los modelos del cálculo. En este trabajo presentamos el Wxmaxima (software libre, versión 11.08) como una alternativa a los dos paquetes mencionados anteriormente, específicamente para hallar la solución aproximada de la ecuación de Fredholm de segunda clase. Dicho paquete permite encontrarpor desarrollo de Taylor un núcleo aproximado al núcleo original de la ecuación integral, además aporta las soluciones del sistema de ecuaciones lineales que se forma y que representan los coeficientes del polinomio de dicha aproximación. En Ortigoza [1] se expone el proceso para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, utilizando el Wxmaxima. Robert Corless [2] se plantea la solución aproximada de ecuaciones integrales de Fredholm utilizando Maple. Constantino Molina [3] emplea una rutina de lenguaje Pascal para encontrar una solución aproximada a ecuaciones integrales de Fredholm. Solo, que tanto Maple como Pascal muestran al final los valores de puntos encontrados. Con el Wxmaxima, podemos construir la solución aproximada paso a paso y el estudiante puede ver a través de la interfaz gráfica lo que está ocurriendo. Según Depool [4, Pág. 3], en la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral el uso de una secuencia de instrucciones es decisivo para el logro de los objetivos de enseñanza y aprendizaje. Según Ipanaque [5] el Wxmaxima, es un sistema de álgebra computacional, establecido como un motor de cálculo simbólico y escrito en lenguaje LISP, publicado bajo licencia GNU GPL. Es de hacer notar que está fundamentado en Macsyma, el cual fue desarrollado por MIT en los años 70. No desperdicia memoria ya que posee un buen recolector de basura, sin embargo es recomendable colocar al principio de cada fichero la instrucción “kill (all)”, para limpiar memoria. Tiene un modo consola y una interfaz gráfica. Está escrito en COMMON LISP lo cual permite el acceso a programación.

Elementos de Wxmaxima, para integrales, serie de Taylor y sistemas de ecuaciones lineales.

Se utilizan los comandos integrate, taylor, linsolve,

Para obtener una integración de funciones definida, se utiliza:

Comando“integrate”

integrate (expr, x, a, b);

expr es la función a evaluar, x es la variable, a y b son los límites de la integración. Colocar putno y coma al final de cada orden.

Comando “taylor”

taylor (expr, [x_1,a,n],[x_2,a, n])

expr es la función a utilizar, x-1, x-2 ,…, x-n son las variables que tiene la función, a es el punto de la evaluación, n es el número de términos de la serie.

Comando “expand”

expand(%), lo cual se refiere a expandir la expresión de la salida anterior, usa el símbolo %.

comando “linsolve”

linsolve ([expr_1, ..., expr_m], [x_1, ..., x_n])

donde [expr_1, ..., expr_m] son todas las ecuaciones del sistema y [x_1, ..., x_n] son las variables de cada una de las ecuaciones.

## Fundamentos Teóricos

Tomemos la ecuación de Fredholm.

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{1}$$

Según Kamwal [6, Pág 8-9], el núcleo $k(x,t)$ puede escribirse como $k(x,t)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(t)$

Así,

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(t)\right]\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{2}$$

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\int_a^b b_k(t)\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{3}$$

Llamemos $C_k=\int_a^b b_k(t)\tilde{\varphi}(t)\,dt$, donde k = 1, 2, …, n.

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k(x)C_k \tag{4}$$

Al sustituir (4) en (2)

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(x)C_k-\int_a^b dt=0$$

Luego,

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{C_m-\int_a^b b_m(t)\left[f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k a_k(t)\right]dt\right\}a_m(x)=0$$

De la independencia lineal de las funciones am(x) con m = 1, 2, …,n, se deduce que

$$C_m-\int_a^b b_m(t)\left[f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k(t)\right]dt=0$$

y

$$C_m-\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k\int_a^b b_m(t)a_k(t)\,dt=\int_a^b b_m(t)f(t)\,dt$$

con

$$a_{km}=\int_a^b a_k(t)b_m(t)\,dt$$

y

$$f_m=\int_a^b b_m(t)f(t)\,dt$$

entonces, usando las notaciones

$$C_m-\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{km}C_k=f_m \tag{5}$$

con m =1, 2, …,n.. Con lo cual se forma el sistema

$$\left.\begin{array}{l}(1-\lambda a_{11})C_1-\lambda a_{12}C_2-\cdots-\lambda a_{1n}C_n=f_1\\ -\lambda a_{21}C_1+(1-\lambda a_{22})C_2-\cdots-\lambda a_{2n}C_n=f_2\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ -\lambda a_{n1}C_1-\lambda a_{n2}C_2-\cdots+(1-\lambda a_{nn})C_n=f_n\end{array}\right\}$$

Mostraremosalgunos ejemplos, de las soluciones aproximadas por desarrollo de Taylor. La forma instruccional para resolver está indicada con punto de viñeta.

**Ejemplo 1**

Resolver $\varphi(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}sen\,x+\int_0^1 x\left(1-cosxt^2\right)\varphi(t)\,dt$, ejercicio 305 en Kiseliov [7], donde la solución exacta es $\varphi(x)=x$.

- Identificamos el nucleo, $k(x,t)=x\left(1-\cos xt^2\right)$ y su aproximación por desarrollo de Taylor
  $L(x,t)=-\frac{t^8x^5}{24}+\frac{t^4x^3}{2}$,

- Escribimos la solución aproximada,

$\varphi(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}sen\,x+c_1x^3+c_2x^5$,

con $\varphi(t)=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}sen\,t+c_1t^3+c_2t^5$

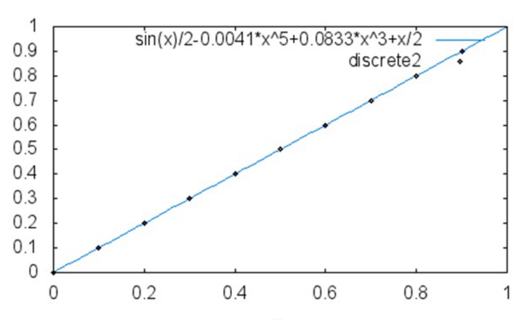
- Formamos el sistema de ecuaciones

$$c_1=\int_0^1\frac{t^4}{2}\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{2}sen\,t+c_1t^3+c_2t^5\right]dt$$

$$c_2=-\int_0^1\frac{t^3}{24}\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{2}sen\,t+c_1t^3+c_2t^5\right]dt$$

- Por lo tanto, $\tilde{\varphi}(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}sen\,x+0.083x^3-0.0041x^5$

Véase la gráfica 1, aparecen juntas la solución aproximada y la solución exacta $\varphi(x)=x$, esta última está identificada con discrete2.




**Grafica 1**

•

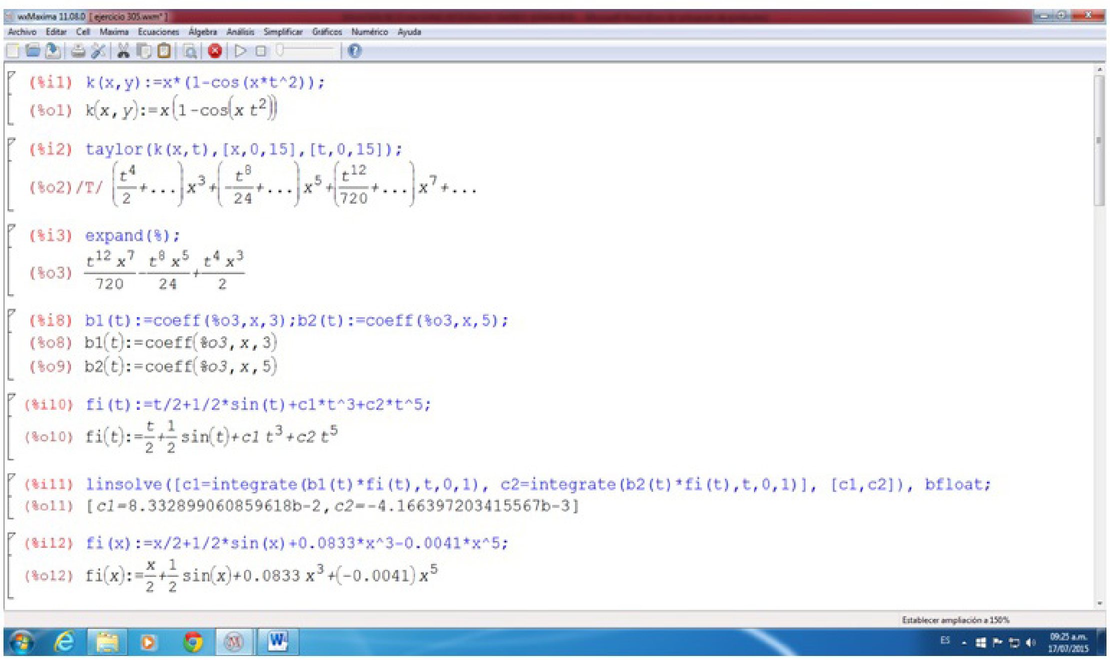
Acotamos

$$\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)<0.0014$$

Hacemos el cálculo de las diferencias

| $x$ | $\left\|x-fi(x)\right\|$ |
|---|---|
| 0.1 | $3.2\text{x}10^{-8}$ |
| 0.2 | $2.4\text{x}10^{-7}$ |
| 0.3 | $7.5\text{x}10^{-7}$ |
| 0.4 | $1.6\text{x}10^{-6}$ |
| 0.5 | $2.8\text{x}10^{-6}$ |
| 0.6 | $4.7\text{x}10^{-6}$ |
| 0.7 | $8.3\text{x}10^{-6}$ |
| 0.8 | $1.5\text{x}10^{-5}$ |
| 0.9 | $3.1\text{x}10^{-5}$ |
| 1 | $6.4\text{x}10^{-5}$ |

Resolviendo ejemplo 1 utilizando la interfaz gráfica delWxmaxima.Observe la gráfica 2

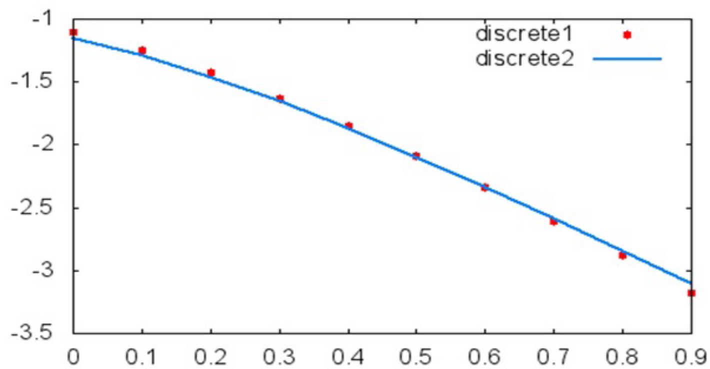



**Gráfica 2**

**Ejemplo 2**

Resolver la ecuación integral $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\int_0^1 e^{xy}\varphi(y)\,dy$, la cual aparece en [2], donde la solución presentada esdiscrete1 = [0,-1.10], [0.1,-1.25], [0.2,-1.43], [0.3,-1.63], [0.4,-1.85], [0.5,-2.09], [0.6,-2.34],[0.7,-2.61],[0.8,-2.88], [0.9,-3.18], estos resultados se obtuvieron con el método de colocación usando MAPLE.

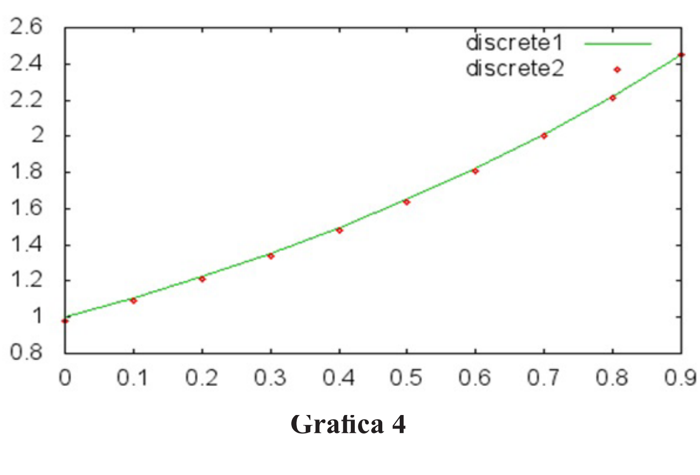
Al resolver la misma ecuación con Wxmaxima se obtiene $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-2.154-1.26x-0.455x^2$ : La diferencia absoluta entre las dos aproximaciones es: [[0,0.054],[0.0,0.04505099009901],[0.0,0.033861538461539], [0.0,0.02731880733945],[0.0,0.021131034482758],[0.0,0.01075],[0.0,0.0021058823529412],[0.0,0.017990939597315],[0.0,0.031756097560976],[0.0,0.070536187845304]], véase la gráfica 3




**Grafica 3**

**Ejemplo 3**

Al resolver la ecuación integral $\varphi(x)=e^{x}+e^{-x-2}-\int_0^1 e^{-x-y-2}\varphi(y)\,dy$, que se encuentra en [3] y se resolvió utilizando una rutina de programación en PASCAL, se obtuvieron los puntos, identificado con discrete1 =[0,0.98], [0.1,1.09], [0.2,1.21], [0.3,1.34], [0.4,1.48], [0.5,1.64], [0.6,1.81], [0.7,2.00], [0.8,2.21], [0.9,2.45], y el error esperado es de 0,025 respecto de la solución exacta. La solución aproximada hallada con Wxmaxima mantiene un error esperado por debajo de 0,008




**Grafica 4**

La forma instruccional para la interacción del ejercicio anterior con la interfaz gráfica de Wxmaxima está indicada con punto de viñeta y es como sigue:

- Se define el nucleo de la ecuación integral y la función f(x) como f(t)

k(x,t):=-exp(-x-t-2); f(t):=exp(t)+exp(-t-2);

- Se indica el número de términos para el desarrollo de Taylor

n:4;

expand(taylor(k(x,t),[x,0,n],[t,0,n]));

- Se ubican los coeficientes para las potencias de x b1(t):=coeff(%o4,x,0);b2(t):=coeff(%o4,x,1);b3(t):=coeff(%o4,x,2);
- Se reescribe la función fi(t)

fi(t):=f(t)+c1+c2*t+c3*t^2;

- Se resuelve el sistema de ecuaciones integrales

linsolve([c1=integrate(b1(t)*fi(t),t,0,1), c2=integrate(b2(t)*fi(t),t,0,1),c3=integrate(b3(t)*fi(t),t,0,1)], [c1,c2,c3]), bfloat;

- Se devuelve el cambio de fi(t) para fi(x) y se grafica contra la exacta

fi(x):=exp(x)+exp(-x-2)-0.13+0.13*x-0.067*x^2; wxplot2d([fi(x),exp(x)], [x,0,1])$

- Se hacen las listas de puntos en PASCAL y se grafican contra los puntos Wxmaxi-mapP:[[0,0.98], [0.1,1.09], [0.2,1.21], [0.3,1.34], [0.4,1.48], [0.5,1.64], [0.6,1.81], [0.7,2.00], [0.8,2.21], [0.9,2.45]]; pW:create_list([x,fi(x)],x,[0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9]),numer; wxplot2d([[discrete,pW],[discrete,pP]],[style,[lines,1,3],[points,1,2]]);
- Se halla la lista de los errores de la solución aproximada Wxmaxma contra la exacta makelist(abs(fi(x)-exp(x)),x,[0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9]),numer;
- Por último, mostramos el ejemplo 4, resuelto con programación en Octave (versión libre de MATLAB). Hacemos la comparación conlos coeficientes obtenidos en Octave y los obtenidos con Wxmaxima. Este ejercicio se encuentra en Kiseliov, 304 ver [7]

**Ejemplo 4**

Al resolver utilizando el programación en Octave (Matlab) para la ecuación $\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+3x-1\right)+\int_{0}^{1}x\left(e^{-xt^{2}}-1\right)\varphi(t)\,dt$, se obtienen los coeficientes $c_1=-0.2499$ y $c_2=0.0677$. Usando Wxmaxima se obtienen

$c_1=-0.2496$ y $c_2=0.0831$. Donde las diferencias absolutas son:

1.1229999999999574*10^-4

4.8639999999999795*10^-4

0.00114209999999998

0.00205119999999998

0.00313750000000002

0.00427679999999997

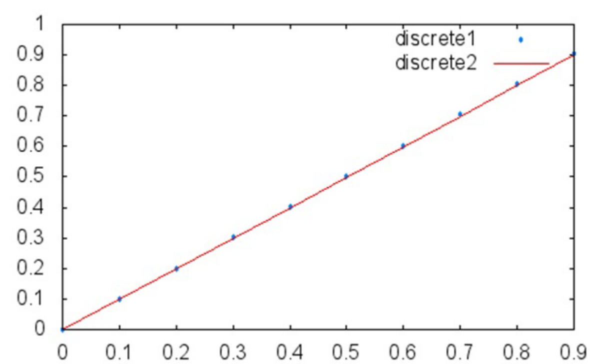
0.00529690000000005

0.00597760000000003

0.00605070000000008

0.00520000000000009

La función discrete1 ubica puntos para la aproximación por Wxmaxima y Discrete2 ubica los puntos para Octave. Para una visualización véase la gráfica 5




**Grafica 5**

El pseudocódigo para Octave (Matlab) es como sigue:

1. Se declara la función, functiony = f(x)
2. Se asigna la función, por ejemplo y = x2
3. Se finaliza la orden con endfunction
4. Se evalúan las integrales con el paquete “Quad”
5. Se construye la matriz con los coeficientes de las variables y se halla su inversa
6. Se construye la matriz con los términos independientes
7. Se multiplica la matriz inversa de los coeficientes de las variables por la matriz de los términos independientes y se hallan los coeficientes polinómicos de la aproximación.
8. Por último se utiliza el paquete de gráficas, para comparar los resultados obtenidos contra la solución exacta.

## Comentarios Finales

El manejo adecuado de las herramientas computacionales, además de facilitar el aprendizaje de las ecuaciones de Fredholm de segunda especie, permitirá a los estudiantes la adquisición de conceptos y conocimientos en el área de la ingeniería, que serán decisivos en su actualización profesional.

Debido a que muchos conceptos son difíciles de conceptualizar, por lo abstracto de la disciplina, Wxmaxima representa un apoyo de visualización grafica en pro de facilitar el aprendizaje del mismo.

La herramienta Wxmaxima permite repasar el proceso empleado para encontrar la aproximación de la ecuación integral, debido a que este queda plasmado en un fichero ".wxm". Los procesos repasados coadyuvan a la "fijación" del conocimiento. Específicamente, sobre la solución de sistemas de ecuaciones lineales, tambiénse aprende a encontrar desarrollo de Taylor para dos variables, lo cual permite ampliar el concepto de dicho teorema.

En el caso de programar en PASCAL u otros lenguajes, la elaboración de dicho programa, puede llevar horas. Aquí siguiendo los pasos indicados se puede construir en menos tiempo.

Algunas aproximaciones dependen de la cantidad de términos tomados en el truncamiento del polinomio de Taylor. Indicamos que no debemos tomar más de tres términos del polinomio de Taylor.

Con este trabajo se han expuesto, las fortalezas del paquete programable Wxmaxima como utilidad para la enseñanza de las ecuaciones integrales a nivel de pregrado o postgrado.

## Referencias bibliograficas

9. Ortigoza G., Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Maxima, Revista Educación Matemática, Vol. 21, No 2, (2009), 143-167.
10. Corless R., Solution linear integral equations.am505a. PDE, Department of Applied Mathematics, University of Western Ontario, Canada, (1998).
11. Molina C., Tesis de Grado, Un método numérico de resolución de ecuaciones integrales, Universidad Autónoma de Puebla, México (2011).
12. Depool R., Tesis Doctoral, La enseñanza y aprendizaje del calculo integral en un entorno computacional. actitudes de los estudiantes hacia el uso de programa de calculo simbólico, Universidad de la Laguna, España, (2005).
13. Ipanaqué, R., Breve Manual de Máxima, Segunda Edición, Grupo de Investigación de la Universidad de Málaga, España, (2012).
14. Kanwal R., Linear integral equations, Academic Press, Pensilvania State University, EEUU, (1971).
15. Krasnov M., Kiseliov A., Makarenko G., Ecuaciones Integrales, Editorial MiR, Moscú, (1970).