Revista Tecnocientífica URU
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
Nº 1 Julio - Diciembre 2011
ISSN: 2244 - 775X / Depósito legal pp 201102ZU3863

Algunas series e integrales con funciones trigonométricas

Alfredo Villalobos[1] y Glenny García[2]

[1] Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería.
Centro de Investigación de Matemática Aplicada (C.I.M.A.)
Universidad Rafael Urdaneta. Facultad de Ingeniería
Vereda del Lago, Avenida 2, El Milagro con calle 86, entrada Sur

[2] Instituto Universitario de Tecnología de Maracaibo (I.U.T.M.). Coordinación de Matemáticas
Av. Principal. Urb. La Floresta. Maracaibo-Venezuela

Recibido 18-03-11 Aceptado 29-04-11

Resumen

En el presente trabajo se aplica una técnica sencilla para deducir algunas sumas de series que involucran funciones trigonométricas. A partir de dichos resultados, se obtienen algunas identidades y se calculan algunas integrales definidas.

Palabras clave: Series, funciones trigonométricas, identidades, integrales definidas.

Some series and integrals with trigonometric functions

Abstract

In this work a simple technique is applied to deduce sums of the series involving trigonometric functions. These results are used to obtain some identities and to calculate some definite integrals.

Key words: Series, trigonometric functions, identities, definite integrals.

Introducción

En un trabajo anterior, Bassali [1] obtiene algunos resultados sobre ciertas series e integrales que involucran δ_n y funciones trigonométricas, donde

$$\delta_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$$

En este trabajo se sigue la misma técnica usada en [1] para deducir, de manera sencilla, las sumas de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \begin{cases} \cos n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta \end{cases}$$

Luego, se dan fórmulas de recurrencia que permiten ampliar los resultados.

También se obtienen valores de algunas integrales definidas con funciones trigonométricas.

Las operaciones que se realizan con las series están justificadas por la convergencia uniforme de las mismas.

Algunas series trigonométricas

Sean

$$C_0(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta \quad \text{y} \quad S_0(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta$$

Entonces

$$\begin{aligned} C_0(r,\theta)+iS_0(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(re^{i\theta}\right)^n \end{aligned}$$

Usando el resultado

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad |z|<1$$

se tiene que

$$C_0 + iS_0 = \frac{1}{1-re^{i\theta}}, \qquad |r|<1$$

de donde

$$1-re^{i\theta} = \frac{1}{C_0+iS_0} = \frac{C_0-iS_0}{C_0^2+S_0^2}$$

$$(1-r\cos\theta) - ir\operatorname{sen}\theta = \frac{C_0}{C_0^2+S_0^2} - i\frac{S_0}{C_0^2+S_0^2}$$

Igualando las partes reales e imaginarias, queda

$$\frac{C_0}{C_0^2+S_0^2} = 1-r\cos\theta \quad \text{y} \quad \frac{S_0}{C_0^2+S_0^2} = r\operatorname{sen}\theta$$

Elevando al cuadrado en ambas ecuaciones y sumando, se tiene

$$\frac{1}{C_0^2+S_0^2} = (1-r\cos\theta)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta = 1-2r\cos\theta+r^2$$

Entonces, resultan las fórmulas

$$C_0(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}, \qquad |r|<1 \tag{1}$$

$$S_0(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}, \qquad |r|<1 \tag{2}$$

las cuales son dadas en [2, pág. 736].

Derivando respecto a r en (1) y (2), se tiene que

$$\frac{\partial C_0}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \cos n\theta \quad \Rightarrow \quad C_1(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, r^n \cos n\theta = r \frac{\partial C_0}{\partial r} \tag{3}$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \operatorname{sen} n\theta \quad \Rightarrow \quad S_1(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, r^n \operatorname{sen} \theta = r \frac{\partial S_0}{\partial r} \tag{4}$$

Efectuando las derivadas, resultan

$$C_1(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, r^n \cos\theta = \frac{r\left[(1-r^2)\cos\theta - 2r\right]}{\left(1-2r\cos\theta + r^2\right)^2}, \quad |r| < 1 \tag{5}$$

$$S_1(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, r^n \operatorname{sen}\theta = \frac{r\left(1-r^2\right)\cos\theta}{\left(1-2r\cos\theta + r^2\right)^2}, \quad |r| < 1 \tag{6}$$

las cuales también aparecen en [2, pág. 737].

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_0}{\partial r^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) r^{n-2} \cos n\theta \\ &= r^{-2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n \cos n\theta - \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \cos n\theta\right] \end{aligned}$$

de donde

$$C_2(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n \cos n\theta = r^2 \frac{\partial^2 C_0}{\partial r^2} + C_1(r,\theta) \tag{7}$$

De igual forma

$$S_2(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n \operatorname{sen} n\theta = r^2 \frac{\partial^2 S_0}{\partial r^2} + S_1(r,\theta) \tag{8}$$

Efectuando, resulta

$$\begin{aligned} C_2(r,\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n \cos n\theta \\ &= \frac{r\left(1-r^4\right)\cos\theta + 2r^2\left(1-r^2\right)\cos^2\theta + 2r^2\left(r^2-2\right)}{\left(1-2r\cos\theta + r^2\right)^3}, \quad |r| < 1 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} S_2(r,\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n \operatorname{sen} n\theta \\ &= \frac{r\left(1-6r^2+r^4\right)\operatorname{sen}\theta + r^2\left(1+r^2\right)\operatorname{sen} 2\theta}{\left(1-2r\cos\theta + r^2\right)^3}, \quad |r| < 1 \end{aligned} \tag{10}$$

Ahora,

$$\frac{\partial^3 C_0}{\partial r^3} = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) r^{n-3} \cos n\theta = \sum_{n=3}^{\infty} \left(n^3 - 3n^2 + 2n\right) r^{n-3} \cos n\theta$$

$$= r^{-3} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^3 r^n \cos n\theta - 3 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n \cos n\theta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \cos n\theta \right]$$

de donde

$$\begin{aligned} C_3(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^3 r^n \cos n\theta \\ &= r^3 \frac{\partial^3 C_0}{\partial r^3} + 3C_2(r, \theta) - 2C_1(r, \theta \end{aligned} \tag{11}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} S_3(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^3 r^n \operatorname{sen} n\theta \\ &= r^3 \frac{\partial^3 S_0}{\partial r^3} + 3S_2(r, \theta) - 2S_1(r, \theta) \end{aligned} \tag{12}$$

Se observa que, continuando con este proceso, es posible generalizar y obtener sumas de series de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} C_k(r, \theta) \\ S_k(r, \theta) \end{array} \right. = \sum_{n=1}^{\infty} n^k r^n \left\{ \begin{array}{l} \cos n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta \end{array} \right. \tag{13}$$

Para ello, se usará el siguiente resultado [3]:

$$\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) \cdots \left(x - x_n\right) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ \cdots \ + a_{n-1} x + a_n$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= -\sum x_i \\ a_2 &= \sum_{(i<j)} x_i x_j \\ a_3 &= -\sum_{(i<j<k)} x_i x_j x_k \\ &\vdots \\ a_n &= (-1)^n x_1 x_2 x_3, \ \cdots \ , x_n \end{aligned}$$

Aplicando el resultado anterior, se tiene

$$n\left(n - n_1\right)\left(n - n_2\right) \cdots \left(n - k + 1\right) = n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \ \cdots \ + a_{k-1} n + a_k$$

con

$$a_i = (-1)^i \sum \begin{matrix}\text{(productos de los números } 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ k-1 \text{ tomados} \\ i \text{ a } i \text{ en orden creciente)}\end{matrix} \tag{14}$$

Es fácil ver en (14) que $a_k = 0$. De esta manera, se tiene que

$$\begin{aligned} r^k \frac{\partial^k C_0}{\partial r^k} &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) r^n \cos\theta \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \left(n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \cdots + a_{k-1} n\right) r^n \cos n\theta \\ &= \sum_{n=1}^{\theta} n^k r^n \cos n\theta + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} r^n \cos\theta \\ &\quad + a_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-2} r^n \cos\theta + \cdots + a_{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \cos\theta \\ &= C_k(r,\theta) + a_1 C_{k-1}(r,\theta) + a_2 C_{k-2}(r,\theta) + \cdots + a_{k-1} C_1(r,\theta) \end{aligned}$$

de donde

$$C_k(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k r^n \cos n\theta = r^k \frac{\partial^k C_0}{\partial r^k} - \sum_{i=1}^{k-1} a_i C_{k-i}(r,\theta) \qquad |r|<1, \quad k \ge 1 \tag{15}$$

Análogamente, se obtiene

$$S_k(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k r^n \operatorname{sen} n\theta = r^k \frac{\partial^k S_0}{\partial r^k} - \sum_{i=1}^{k-1} a_i S_{k-i}(r,\theta) \tag{16}$$

En las tablas No. 1 y No. 2, dadas al final del trabajo, se muestran los resultados hasta $k = 5$.

Si se usa la identidad

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

queda

$$r^k \frac{\partial^k C_0}{\partial x^k} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} r^n \cos n\theta$$

lo cual también puede escribirse como

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+k)!}{m!} r^m \cos(m+k)\theta = \frac{\partial^k C_0}{\partial r^k}, \quad |r|<1, \ k \ge 0 \tag{17}$$

Análogamente, se obtiene

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+k)!}{m!}r^m \operatorname{sen}(m+k)\theta = \frac{\partial^k S_0}{\partial r^k}, \quad |r|<1, \;\; k\geq 0 \tag{18}$$

De (1) se deduce fácilmente que

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}, \quad |r|<1 \tag{19}$$

Usando (2) y (19) en (6), se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n \operatorname{sen} n\theta = \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta\right)\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta\right)\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta$$

Efectuando el producto de Cauchy:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right), \qquad c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_k b_{n-k+1}\right)$$

queda que

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n \operatorname{sen} n\theta = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\theta \cos(n-k+1)\theta\right) r^{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\theta \cos(n-k+1)\theta\right) r^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)r^n \operatorname{sen} n\theta$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n+1} \operatorname{sen}(n+1)\theta$$

Igualando coeficientes de las mismas potencias de *r*, resulta la nueva identidad trigonométrica

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\theta \cos(n-k+1)\theta = \frac{n}{2}\operatorname{sen}(n+1)\theta, \quad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{20}$$

Usando

$$\cos(n-k+1)\theta = \cos(n+1)\theta\cos k\theta + \operatorname{sen}(n+1)\theta \operatorname{sen} k\theta$$

$$\operatorname{sen} 2k\theta = 2\operatorname{sen} k\theta \cos k\theta$$

en (20), se tiene

$$\frac{1}{2}\cos(n+1)\theta \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} 2k\theta + \operatorname{sen}(n+1)\theta \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^2 k\theta = \frac{n}{2}\operatorname{sen}(n+1)\theta$$

Pero, $2\operatorname{sen}^2 k\theta = 1-\cos 2k\theta$. Luego,

$$\frac{1}{2}\cos(n+1)\theta \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} 2k\theta + \frac{n}{2}\operatorname{sen}(n+1)\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(n+1)\theta \sum_{k=1}^{n} \cos 2k\theta$$

$$= \frac{n}{2}\operatorname{sen}(n+1)\theta$$

de donde se obtiene

$$\tan(n+1)\theta = \frac{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} 2k\theta}{\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\theta}, (n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{21}$$

lo cual también resulta de [2, pág.637 (5)].

Integrales

Integrando en (1) entre 0 y π, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \int_0^{\pi} \cos n\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{(1 - r\cos\theta)\, d\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

Pero,

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta\, d\theta = \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases}$$

Luego, resulta

$$\int_0^{\pi} \frac{(1 - r\cos\theta)\, d\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \pi \quad (\text{independiente de } r,\ |r| < 1) \tag{22}$$

Multiplicando en (1) por $\cos m\theta$ (m fijo, m = 1, 2, …) e integrando entre 0 y π, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{(1 - r\cos\theta)\cos m\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} d\theta$$

Usando la propiedad de ortogonalidad

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta\, d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}$$

se obtiene

$$\int_0^{\pi} \frac{(1 - r\cos\theta)\cos n\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} d\theta = \frac{\pi}{2} r^n, \quad |r| < 1,\ \ n \geq 1 \tag{23}$$

Multiplicando en (2) por $\operatorname{sen} m\theta$ (m fijo) e integrando en 0 y π, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\pi} \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} m\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} d\theta$$

Usando la propiedad de ortogonalidad

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta\, d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}$$

se obtiene

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} n\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\,d\theta = \frac{\pi}{2}r^{n-1}, \quad |r|<1, \;\; n\geq 1 \tag{24}$$

Las integrales (22), (23) y (24) se deducen de resultados dados en [2, pág. 414, 415].

Aplicando el mismo procedimiento en (15) y (16) resultan, respectivamente,

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \frac{\partial^k}{\partial r^k}\left(\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\right)d\theta = \frac{\pi}{2}r^{n-k}\left[n^k+\sum_{i=1}^{k-1}a_i n^{k-i}\right] \tag{25}$$

$$|r|<1, \;\; k, \; n\leq 1$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} n\theta \frac{\partial^k}{\partial r^k}\left(\frac{r\operatorname{sen}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\right)d\theta = \frac{\pi}{2}r^{n-k}\left[n^k+\sum_{i=1}^{k-1}a_i n^{k-i}\right] \tag{26}$$

$$|r|<1, \;\; k, \; n\leq 1$$

los cuales son resultados más generales.

Como casos particulares, para $k = 1$ se obtiene

$$\int_0^{\pi} \frac{\left[(1+r^2)\cos\theta-2r\right]\cos n\theta}{\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)^2}\,d\theta = \frac{n\pi}{2}r^{n-1}, \quad |r|<1; \;\; n\geq 1 \tag{27}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} n\theta}{\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)^2}\,d\theta = \frac{n\pi r^{n-1}}{2\left(1-r^2\right)}, \quad |r|<1; \;\; n\geq 1 \tag{28}$$

los cuales pueden deducirse de resultados dados en [2, pág. 414, 415].

Tabla No. 1

$$C_0(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}, \quad \left|r<1\right|$$

k	$C_k(r,\theta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k r^n \cos n\theta \quad , \quad \lvert r\rvert < 1$
1	$\frac{r[(1+r^2)\cos\theta-2r]}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}$
2	$\frac{r(1-r^4)\cos\theta+2r^2(1-r^2)\cos^2\theta+2r^2(r^2-2)}{(1-2r\cos\theta+r^2)^3}$
3	$r^3\frac{\partial^3 C_0}{\partial r^3}+3C_2(r,\theta)-2C_1(r,\theta)$
4	$r^4\frac{\partial^4 C_0}{\partial r^4}+5C_3(r,\theta)-11C_2(r,\theta)+6C_1(r,\theta)$
5	$r^5\frac{\partial^5 C_0}{\partial r^5}+10C_4(r,\theta)-35C_3(r,\theta)+38C_2(r,\theta)-24C_1(r,\theta)$

Tabla No. 2

$$S_0(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta = \frac{r \operatorname{sen}\theta}{1-2r\cos\theta + r^2}, \quad |r<1|$$

k	$S_k(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k r^n \cos n\theta \quad , \quad \lvert r\rvert < 1$
1	$\frac{r(1-r^2)sen\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}$
2	$\frac{r(1-6r^2+r^4)sen\theta+r^2(1+r^2)sen2\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^3}$
3	$r^3\frac{\partial^3 S_0}{\partial r^3} + 3S_2(r,\theta) - 2S_1(r,\theta)$
4	$r^4\frac{\partial^4 S_0}{\partial r^4} + 5S_3(r,\theta) - 11S_2(r,\theta) + 6S_1(r,\theta)$
5	$r^5\frac{\partial^5 S_0}{\partial r^5} + 10S_4(r,\theta) - 35S_3(r,\theta) + 38S_2(r,\theta) - 24S_1(r,\theta)$

Referencias bibliográficas

1. Bassali, W.A.: “On certain infinite series and definite integrals involving $\delta_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ ”, Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia, Vol. 10, No. 2, (1987), 29-34.

2 Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Mariche, O. I.: “Integrals and Series”, Vol 1, Gordon and Breach Science Publishers, New York, (1988).

3. Bronshtein, I. y Semendiaev, K.: “Manual de Matemáticas para Ingenieros y Estudiantes”, Editorial Mir, Moscú, (1982).