Revista Tecnocientífica URU
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
Nº 4 Enero - Junio 2013
ISSN: 2244 - 775X

Algunas propiedades de las N-Normas (I)

José Sarabia

Departamento de Estudios Generales y Básicos, Sección de Matemática
UNEXPO-Barquisimeto
Avenida Corpahuaico, Barquisimeto, 3002, Venezuela
jsarabia196@gmail.com

Recibido: 22-02-2013 Aceptado: 26-04-2013

Resumen

En el presente trabajo se desarrollan algunas propiedades de la función asociativa n-norma o norma nula. En especial se establecen métodos para construir n-normas a partir de t-normas y s-normas dadas. De esta manera, en muchos casos, las propiedades de la n-norma se derivan de las propiedades de las t-normas y s-normas, tal como sucede con la continuidad y la idempotencia.

Palabras clave: t-norma, s-norma, u-norma, n-norma, idempotente.

Some properties of N-Norms

Abstract

In this paper we develop some properties of associative function n-norm or null norm. In particular we establish methods to build n-norms from t-norms and s-norms given. Thus, in many cases the properties of the n-norm are derived from the properties of the t-norms and s-norms, such as with continuity and idempotent.

Key words: t-norm, s-norm, u-norm, n-norm, idempotent.

Introducción

El concepto de n-norma, norma nula o “null norm” es una variante de los conceptos de t-norma, s-norma(t-conorma) y u-norma(uninorma), el cual fue propuesto por T. Calvo en [3]. Su importancia comienza a aumentar, tanto en el campo de las Funciones Asociativas, como en sus aplicaciones, sobre todo en los Sistemas Expertos, Cuantificadores Borrosos, etc. (Vea: [4], [8] y [9]). Inclusive ya se está trabajando en las denominadas n-normas no conmutativas (Vea: [2]). En el presente trabajo hay algunos resultados que no son originales, pero se incluyen con el objeto de facilitar la lectura a aquellas personas que se inician en el campo de las funciones asociativas

Preliminares

Daremos algunas definiciones importantes en el desarrollo del tema.

Definición 2.1

Una t-norma T es una operación sobre $I = [0,1]$, tal que cumple los siguientes axiomas:

(t.1) $T(x,y) = T(y,x) \quad \forall x, y \in I.$ (Conmutatividad)

(t.2) $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z)) \quad \forall x,y,z \in I.$ (Asociatividad)

(t.3) $x \leq y \Rightarrow T(x,z) \leq T(y,z) \quad \forall x,y,z \in I.$ (Monotonía creciente)

(t.4) $T(x,1) = x \quad \forall x \in I.$ (Existencia del elemento neutro)

Definición 2.2

Una s-norma o t-conorma $\boldsymbol{S}$ es una operación sobre $I = [0,1]$, tal que cumple los siguientes axiomas:

(s.1) $S(x,y) = S(y,x) \quad \forall x, y \in I.$ (Conmutatividad)

(s.2) $S(S(x,y),z) = S(x,S(y,z)) \quad \forall x,y,z \in I.$ (Asociatividad)

(s.3) $x \leq y \Rightarrow S(x,z) \leq S(y,z) \quad \forall x,y,z \in I.$ (Monotonía creciente)

(s.4) $S(x,0) = x \quad \forall x \in I.$ (Existencia del elemento neutro)

Definición 2.3

Una u-norma o uninorma $\boldsymbol{U}$ es una operación sobre $I = [0,1]$, tal que cumple los siguientes axiomas:

(u.1) $U(x,y) = U(y,x) \quad \forall x, y \in I.$ (Conmutatividad)

(u.2) $U(U(x,y),z) = U(x,U(y,z)) \quad \forall x,y,z \in I.$ (Asociatividad)

(u.3) $x \leq y \Rightarrow U(x,z) \leq U(y,z) \quad \forall x,y,z \in I.$ (Monotonía creciente)

(u.4) Existe $e \in I$ tal que: $U(x,e) = x \quad \forall x \in I.$ (Existencia del elemento neutro).

Como vemos los tres primeros axiomas de cada una, coinciden. Asimismo cuando $e = 0$, tenemos que una u-norma es s-norma, mientras que si $e = 1$, la u-norma es t-norma.

Para un estudio bastante completo de estas operaciones ver: [1], [2], [5], [6],[11] y [12].

Definición 2.4

Una n-norma o norma nula $\boldsymbol{V}$ es una operación sobre $I = [0,1]$, tal que cumple los siguientes axiomas:

(n.1) $V(x,y) = V(y,x) \quad \forall x, y \in I.$ (Conmutatividad)

(n.2) $V(V(x,y),z) = V(x,V(y,z)) \quad \forall x,y,z \in I.$ (Asociatividad)

(n.3) $x \leq y \Rightarrow V(x,z) \leq V(y,z) \quad \forall x,y,z \in I.$ (Monotonía creciente)

(n.4) Existe $a \in (0,1)$ tal que $V(x,0) = x \quad \forall x \in [0,a]$ y $V(x,1) = x \quad \forall x \in [a,1].$

Consecuencias de la definición de n-norma

a) $V(x,a) = V(a,x) = a \quad \forall x \in I$. O sea a es el elemento absorbente o aniquilador de V.

Además, tenemos que: $V(x,y) = a, \forall (x,y) \in ([0,a] \times [a,1]) \cup ([a,1] \times [0,a]) = \Re_a$.

b) Si V es una n-norma entonces:

$$T_V(x,y) = \frac{1}{1-a}(V(a+(1-a)x\,, a+(1-a)y) - a) \quad (2.1)$$

es una t-norma que recibe el nombre de t-norma asociada a la n-norma V.

Asimismo:
$$S_V(x,y) = \frac{1}{a}V(ax,ay) \quad (2.2)$$

es una s-norma que recibe el nombre de s-norma asociada a la n-norma V.

c) Si V es una n-norma con elemento absorbente $a \in (0,1)$, entonces no puede ser t-norma, pues de serlo $V(a,0) = 0$ y $V(a,0) = a \neq 0$ (¡). Tampoco puede ser s-norma, pues si lo es, tenemos que: $V(a,1) = 1$, pero $V(a,1) = a$, de acuerdo al literal a).

Finalmente, tampoco puede ser u-norma con elemento neutro $e \in (0,1)$. En efecto, si lo fuera, y si $a \in (0,e)$, entonces: $V(e,1) = 1$, pero al ser a el elemento absorbente, tenemos que: $V(e,1) = e$ (¡). Luego, debería tenerse que: $a \in (e,1)$. Entonces: $V(e,0) = 0$, pero $V(e,0) = e$. De nuevo tenemos una contradicción, luego V no puede ser u-norma.

d) Para una n-norma V de elemento absorbente $a \in (0,1)$, tenemos que: (Vea figura 1)

$$V(x,y)\begin{cases} \geq \max\{x,y\} & \text{si } (x,y) \in [0,a]^2 \\ \leq \min\{x,y\} & \text{si } (x,y) \in [a,1]^2 \\ a & \text{si } (x,y) \in \Re_a \end{cases}$$

Donde: $\Re_a = ([\mathbf{0},\boldsymbol{a}] \times [\boldsymbol{a},\mathbf{1}]) \cup ([\boldsymbol{a},\mathbf{1}] \times [\mathbf{0},\boldsymbol{a}])$.

e) Antes de estudiar otras propiedades de la n-norma, veamos una caracterización de esta función de agregación.

Teorema

Sea V una operación binaria sobre I: conmutativa, asociativa, monótona creciente y cumpliendo la propiedad de valor intermedio en cada componente. Entonces: $V(0,0) = 0$ y $V(1,1) = 1$ si y solo si V es t-norma, s-norma, ó n-norma.

Demostración:

Para el directo, tenemos que: $V(0,1) = 0$, $0 < V(0,1) < 1$ ó $V(0,1) = 1$.

Si $V(0,1) = 0$, como $V(1,1) = 1$, para $y \in (0,1)$, existe $x \in (0,1)$ tal que $V(x,1) = y$. Luego: $V(y,1) = V(V(x,1),1) = V(x,V(1,1)) = V(x,1) = y, \quad \forall y \in I$. Por lo tanto V es una t-norma.

Si $V(0,1) = 0$, como $V(0,0) = 0$, para $y \in (0,1)$, existe $x \in (0,1)$ tal que $V(0,x) = y$. Luego: $V(0,y) = V(0,V(0,x)) = V(V(0,0),x) = V(0,x) = y, \quad \forall y \in I$. De manera que V es una s-norma.

Finalmente, si $V(0,1) = a \in (0,1)$, entonces:

$$V(a,0) = V(V(0,1),0) = V(V(1,0),0) = V\big(1, V(0,0)\big) = V(1,0) = a \quad (1)$$

$$V(a,1) = V(V(0,1),1) = V\big(0, V(1,1)\big) = V(0,1) = a \quad (2)$$

$$a = V(a,0) \le V(a,a) \le V(a,1) = a \quad \Rightarrow \quad V(a,a) = a \quad (3)$$

Luego: para $y \in (0,a)$, como: $0 = V(0,0) < y < V(a,0) = a$, existe $x \in (0,a)$ tal que: $V(x,0) = y$. Por lo tanto: $V(y,0) = V(V(x,0),0) = V(x,V(0,0)) = V(x,0),0) = y$, $\forall y \in [0,a]$, pues por (1) y (3), $V(a,0) = a$ y $V(a,a) = a$.

Por otra parte, si $y \in (a,1)$, como: $V(0,1) = a < y < V(1,1) = 1$, entonces existe $x \in (0,1)$, tal que: $V(x,1) = y$. De aquí, por asociatividad, por (2) y (3), tenemos que: $V(y,1) = y$, $\forall y \in [a,1]$.

Luego V es una n-norma de elemento absorbente: $a = V(0,1)$.

El recíproco sigue de los axiomas de la n-norma y porque (n.4) implica que: $V(0,0) = 0$ y $V(1,1) = 1$.

Propiedades importantes de las n-normas

A) Construcción de n-normas a partir de una t-norma y una s-norma.

En b) y c) de acuerdo a la sección 2 se tiene que a partir de una n-norma V, se construye una t-norma T_V, dada por (2.1); y una s-norma S_V dada por (2.2). Asimismo, se obtendrá que dado una t-norma T y una s-norma S, se puede construir una n-norma V, siendo ésta, única. Observe que con ellas también se puede construir una u-norma, pero ésta no es única (Vea teorema 3.3 en [11]). El teorema siguiente aparece enunciado en [2, p.216] y en [5, p.228]. Y su demostración sigue fácilmente de las propiedades de T y S, analizando los diferentes casos que se presentan, sobre todo al probar la asociatividad.

Teorema 3.1

Sea T una t-norma, S una s-norma y $a \in (0,1)$. Entonces existe una única n-norma $V = V_{T,S,a}$ tal que: $T_V = T$, $S_V = T$ y $V(x,a) = a \quad \forall x \in I$. Siendo ésta:

$$V_{T,S,a} = \begin{cases} aS\left(\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{a}\right) & (x,y) \in [0,a]^2 \\ a + (1-a)T\left(\dfrac{x-a}{1-a}, \dfrac{y-a}{1-a}\right) & (x,y) \in [a,1]^2 \\ a & e.o.c \end{cases} \quad (3.1)$$

Vea la figura 2.

Este teorema 3.1 nos permite construir numerosos ejemplos de n-normas.

Figura 1

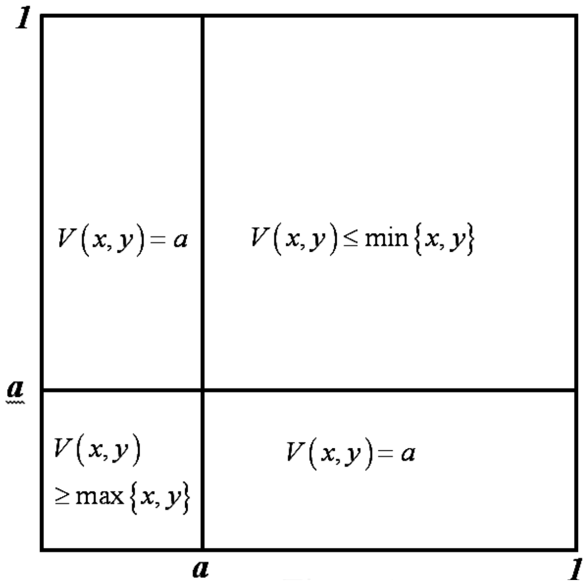
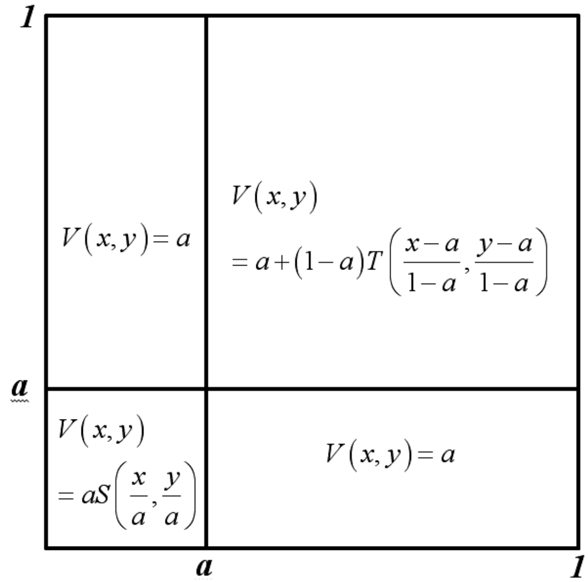


Figura 2



B) Ejemplos de n-normas

1) Sean: $T_P(x,y) = xy$ la t-norma producto y $S_P(x,y) = x + y - xy$ la s-norma producto, y sea $a \in (0,1)$. Entonces la n-norma definida a partir de ellas, recibe el nombre de **n-norma producto**, y viene dada así:

$$V_{P,a} = \begin{cases} x + y - \dfrac{xy}{a} & (x,y) \in [0,a]^2 \\ a + \dfrac{(x-a)(y-a)}{1-a} & (x,y) \in [a,1]^2 \\ a & (x,y) \in \Re_a \end{cases}$$

2) La siguiente n-norma está construida con un par (T,S), donde ellas no son duales. Así, tomamos: $T_P(x,y) = xy$ (t-norma producto), y $S_M(x,y) = \max\{x,y\}$ (s-norma máxima), asimismo: $a \in (0,1)$. Entonces la n- norma construida usando el teorema 3.1, es:

$$V_{P,M,a} = \begin{cases} \max\{x,y\} & (x,y) \in [0,a]^2 \\ a + \dfrac{(x-a)(y-a)}{a} & (x,y) \in [a,1]^2 \\ a & (x,y) \in \Re_a \end{cases}$$

Este ejemplo sirve para observar que dada una n-norma V, no siempre T_V y S_V son duales.

3) Sean: $T_L(x,y) = \max\{x + y - 1, 0\}$ (t-norma de Lukasiewicz), $S_L(x,y) = \min\{x + y, 1\}$ (s-norma de Lukasiewicz) y $a \in (0,1)$. Con ellas definimos la n-**norma de Lukasiewicz,** la cual queda en la forma: (Vea fig.3, con $a = 0.3$ y fig.4, con $a = 0.5$)

$$V_{L,a}(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{si: } x + y \leq a \ \wedge \ (x,y) \in [0,a]^2 \\ x + y - 1 & \text{si: } x + y - 1 \geq a \ \wedge \ (x,y) \in [a,1]^2 \\ a & e.o.c \end{cases}$$

Figura 3

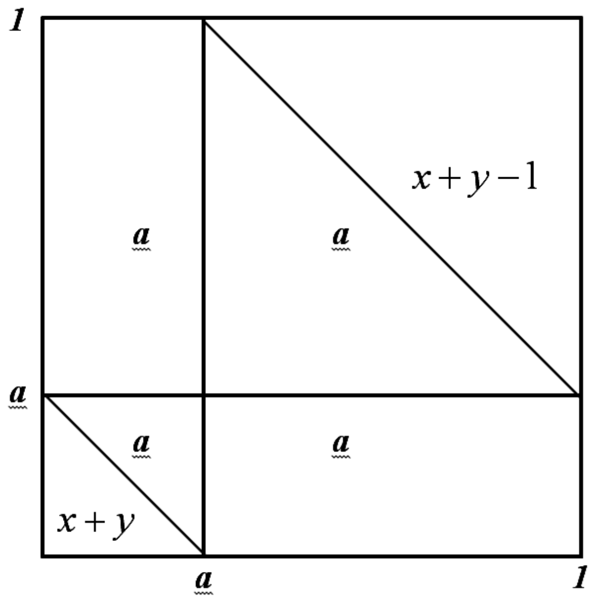
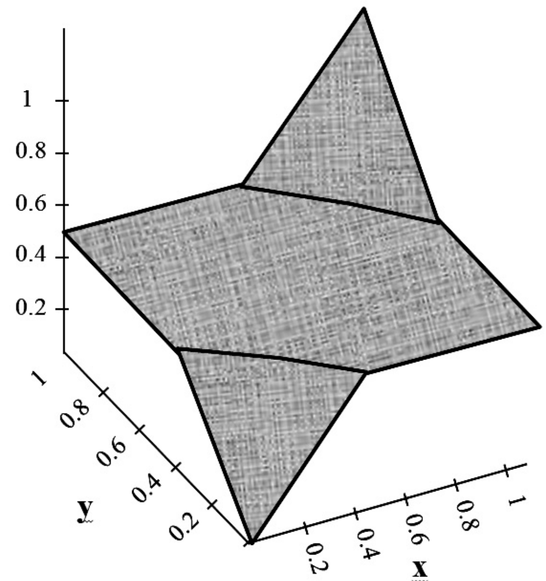


Figura 4



4) Sean: T_D la t-norma drástica y $S_M(x,y) = \max\{x,y\}$, la s-norma máxima, donde:

$$T_D(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \in [0,1)^2 \\ \min\{x,y\} & e.o.c \end{cases}$$

Entonces la n-norma que ellas definen para $a \in (0,1)$, es:

$$V_{D,M,a}(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} & \text{si: } (x,y) \in [0,a]^2 \\ \min\{x,y\} & \text{si: } (x = 1 \ \wedge y \geq a) \vee (y = 1 \wedge x \geq a) \\ a & e.o.c \end{cases}$$

En el literal C), veremos que si V es una n-norma cualquiera de elemento absorbente a, entonces: $V_{D,M,a}(x,y) \leq V(x,y)\ \forall (x,y) \in I^2$. Por esta razón a $V_{D,M,a}$ se le llama la **n-norma más débil** de la familia de las n-normas de elemento absorbente a. (Vea la fig.5, donde $a = 0.5$)

5) Similarmente, si tomamos T_M y S_D, donde: $T_M(x,y) = \min\{x,y\}$ (t-norma máxima) y

$$S_D(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} & \text{si: } x.y = 0 \\ 1 & \text{si: } x.y \neq 0 \end{cases} \quad \text{(s-norma drástica).}$$

entonces, la n-norma que define: $V_{D,M,a}$, viene dada así:

$$V_{M,D,a}(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\} & \text{si: } (x,y) \in [a,1]^2 \\ \max\{x,y\} & \text{si: } \big((x \leq a) \wedge (y = 0)\big) \vee \big((y \leq a) \wedge (x = 0)\big) \\ a & e.o.c \end{cases}$$

En C), demostraremos que si V es una norma de elemento absorbente $a,$ entonces: $V_{D,M,a}(x,y) \leq V(x,y)\ \forall (x,y) \in I^2$. Por esta razón a esta n-norma se le conoce con el nombre de la **n-norma más fuerte** (Vea la fig.6, también con $a = 0.5$)

Figura 5

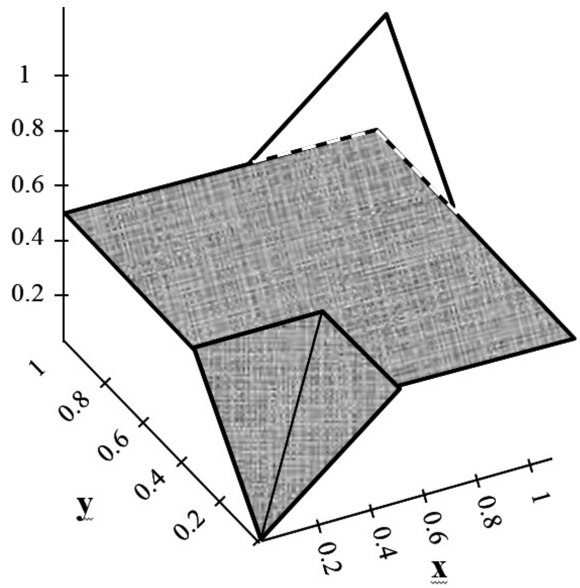
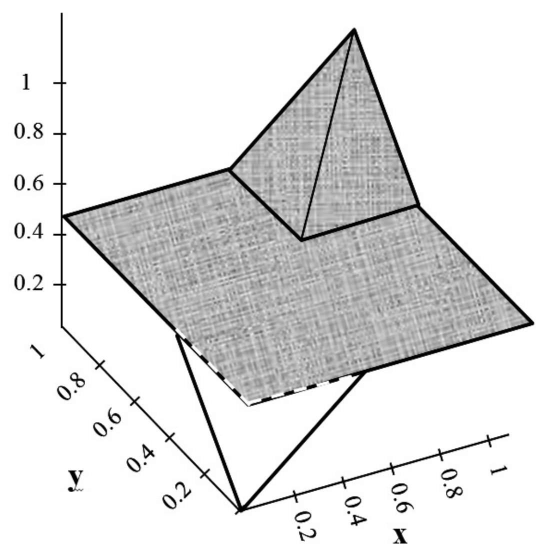


Figura 6

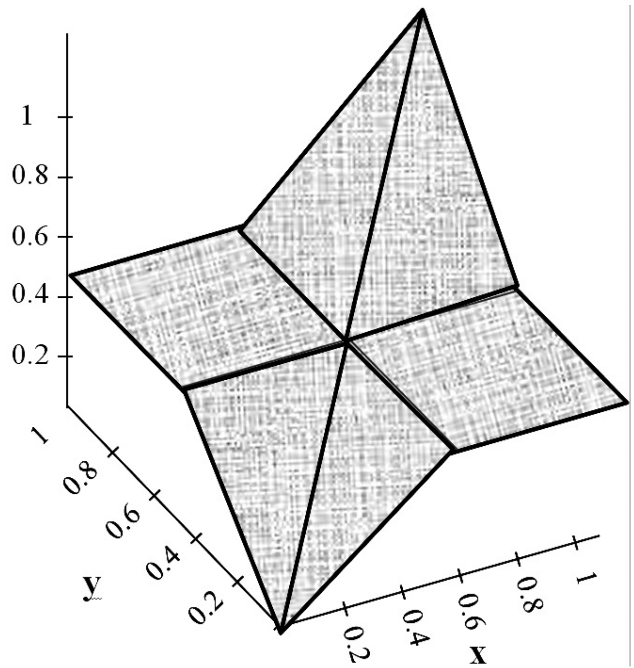


6) Sean ahora: $T_M(x,y) = \min\{x,y\}$, $S_M(x,y) = \max\{x,y\}$ y $a \in (0,1)$. La n-norma que se obtiene de ellos es:

$$V_{min,max,a}(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} & (x,y) \in [0,a]^2 \\ \min\{x,y\} & (x,y) \in [a,1]^2 \\ a & e.o.c \end{cases}$$

Esta n-norma tiene particular importancia, por ser la única n-norma idempotente con elemento absorbente $a \in (0,1)$ (Vea la fig.7, donde $a = 0.5$).

Figura 7



C) Comparación de n-normas de elemento absorbente a

Teorema 3.2

Sea V una n-norma con elemento absorbente $a \in (0,1)$. Entonces:

$$V_{D,M,a}(x,y) \leq V(x,y) \leq V_{M,D,a}(x,y) \quad \forall (x,y) \in I^2$$

Demostración:

Si $(x,y) \in [0,a]^2$, entonces:

$$V_{D,M,a}(x,y) = aS_M\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right) \leq aS_V\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right) = V(x,y) \leq aS_D\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right) = V_{M,D,a}(x,y)$$

Si $(x,y) \in [a,1]^2$, entonces:

$$V_{D,M,a}(x,y) = a + (1-a)T_D\left(\frac{x-a}{1-a},\frac{y-a}{1-a}\right) \leq a + (1-a)T_V\left(\frac{x-a}{1-a},\frac{y-a}{1-a}\right) = V(x,y)$$
$$\leq a + (1-a)T_M\left(\frac{x-a}{1-a},\frac{y-a}{1-a}\right) \leq V_{M,D,a}(x,y)$$

Finalmente en $\Re_a$, tenemos: $V_{D,M,a}(x,y) = V(x,y) = V_{M,D,a}(x,y) = a$.

D) Dualidad de las n-normas

Definición 3.1

Sea N una función de I en I. Diremos que es una negación fuerte si cumple lo siguiente:

(N.1) $\forall a,\, b \in I$ con $a < b$, entonces: $N(a) > N(b)$ (Estrictamente decreciente).

(N.2) $\forall a \in I$ se cumple: $N\big(N(a)\big) = a$ (Involución).

Algunos ejemplos de negación fuerte son:

1) $N(x) = 1 - x$ (Negación estándar).

2) $N_{S,\beta}(x) = \dfrac{1-x}{1+\beta x}$ $(\beta \neq 0, \beta > -1)$ (Negación de Sugeno de parámetro β)

Entre otras propiedades de la negación fuerte tenemos las siguientes:

a) $N(0) = 1; N(1) = 0$

b) N es biyectiva y continua sobre I.

c) Existe un único punto fijo para N. Por ejemplo para la negación de Sugeno de parámetro β, el punto fijo es: $\bar{a} = \dfrac{\sqrt{1+\beta}-1}{\beta}$.

Teorema 3.3

Sea V una n-norma con elemento absorbente a, y sea N una negación fuerte. Entonces: $W(x,y) = N\big(V(N(x),N(y))\big)$ (3.2), es una n-norma de elemento absorbente $N(a)$.

Demostración:

(n.1) es inmediato de la conmutatividad de V. Para probar (n.2), procedemos así:

$$W(W(x,y),z) = N\Big(V\Big(N\big(W(x,y)\big),N(z)\Big)\Big) = N\Big(V\Big(V\big(N(x),N(y)\big)\Big),N(z)\Big) =$$

$$N\Big(V\Big(N(x),V\big(N(y),N(z)\big)\Big)\Big) = N\bigg(V\bigg(N(x),N\Big(N\Big(V\big(N(y),N(z)\big)\Big)\Big)\bigg)\bigg) =$$

$$W\Big(x,N\Big(V\big(N(y),N(z)\big)\Big)\Big) = W\big(x,W(y,z)\big) \quad \forall x,y,z \in I.$$

(n.3) Si $x \leq y$, entonces: $N(x) \geq N(y)$. Luego: $V\big(N(x),N(z)\big) \geq V\big(N(y),N(z)\big)$. Por lo tanto: $W(x,z) = N\Big(V\big(N(x),N(z)\big)\Big) \leq N\Big(V\big(N(y),N(z)\big)\Big) = W(y,z)$.

Finalmente, para (n.4) tenemos que: $W(x,N(a)) = N\big(V(N(x),a)\big) = N(a)\ \forall x \in I$. Luego, W es una n-norma con $N(a)$ como elemento absorbente.

Definición 3.2

A la n-norma $W(x,y) = N\big(V(N(x),N(y))\big)$ (3.2), se le llama n-norma dual de **V**, y se le denota $W_{V,N}$.

Nota: si $V = W_{V,N}$, es decir si V es auto-dual con respecto a N, entonces: $N(a) = a$. De manera que N debe tener al elemento absorbente a como punto fijo. Luego si: $N(a) \neq a$, entonces V no puede ser auto-dual con respecto a N.

En el teorema siguiente se da un procedimiento para construir una n-norma V que sea auto-dual con respecto a una negación fuerte N. En [7], se menciona un resultado para t-normas que puede ser usado en el mencionado teorema.

Teorema 3.4

Dadas: la t-norma T, la s-norma S y $a \in (0,1)$, entonces: $V = V_{T,S,a}$ es n-norma auto-dual respecto a la negación fuerte N, si y solo si:

a) $N(a) = a$;   b) $S(x,y) = \bar{N}^{-1}(T(\bar{N}(x), \bar{N}(y)))$ $\forall x, y \in I$.

Donde: $\bar{N}(t) = \dfrac{N(at) - a}{1 - a}$ $\forall t \in I$.

Demostración:

Supongamos primero que V es auto-dual, es decir que: $V = W_V$.

a) $a = V(a, N(a)) = W_V(a, N(a)) = N(V(N(a), a)) = N(a)$.

b) Sean: $x' = ax$, e $y' = ay$. Donde $x, y \in I$.

Luego: $(x', y') \in [0, a]^2$, y $(N(x'), N(y')) \in [a, 1]^2$. Por lo tanto, si V es auto-dual:

$$V(x', y') = aS\left(\frac{x'}{a}, \frac{y'}{a}\right) = N(V(N(x'), N(y'))) = N\left(a + (1-a)T\left(\frac{N(x') - a}{1 - a}, \frac{N(y') - a}{1 - a}\right)\right)$$

Luego: $$aS(x, y) = N\left(a + (1-a)T\left(\frac{N(ax) - a}{1 - a}, \frac{N(ay) - a}{1 - a}\right)\right) \quad \text{(I)}$$

Definamos la función:

$$\bar{N}(x) = \frac{N(ax) - a}{1 - a} \quad \forall x \in I$$

$\bar{N}$ es estrictamente decreciente y biyectiva sobre I, por lo que existe $\bar{N}^{-1}$, y viene dada así:

$$\bar{N}^{-1}(x) = \frac{1}{a} N(a + (1-a)x) \quad \forall x \in I \quad \text{(II)},$$ por ser N involutiva.

Por (I) y (II), tenemos b), pues:

$$S(x, y) = \frac{1}{a} N\left(a + (1-a)T(\bar{N}(x), \bar{N}(y))\right) = \bar{N}^{-1}(T(\bar{N}(x), \bar{N}(y))).$$

Veamos ahora el recíproco, o sea:

$a)$ $N(a) = a$; $b)$ $S(x, y) = \bar{N}^{-1}\left(T(\bar{N}(x), \bar{N}(y))\right)$ $\forall x, y \in I$.

Sea $(x, y) \in [0, a]^2$, luego: $(N(x), N(y)) \in [a, 1]^2$. Entonces:

$$W(x, y) = N\left(V(N(x), N(y))\right) = N\left(a + (1-a)T\left(\frac{N(x) - a}{1 - a}, \frac{N(y) - a}{1 - a}\right)\right)$$

$$W(x, y) = a\bar{N}^{-1}\left(T\left(\bar{N}\left(\frac{x}{a}\right), \bar{N}\left(\frac{y}{a}\right)\right)\right) = aS\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) = V(x, y).$$

Asimismo, si $(x,y) \in [a,1]^2$, entonces: $(N(x),N(y)) \in [0,a]^2$. Luego:

$$W(x,y) = N\left(V\big(N(x),N(y)\big)\right) = N\left(aS\left(\frac{N(x)}{a},\frac{N(y)}{a}\right)\right)$$

$$W(x,y) = N\left(a\bar{N}^{-1}\left(T\left(\bar{N}\left(\frac{N(x)}{a}\right),\bar{N}\left(\frac{N(y)}{a}\right)\right)\right)\right) = N\left(a\bar{N}^{-1}\left(T\left(\frac{x-a}{1-a},\frac{y-a}{1-a}\right)\right)\right)$$

$$W(x,y) = NN\left(a+(1-a)T\left(\frac{x-a}{1-a},\frac{y-a}{1-a}\right)\right) = a+(1-a)T\left(\frac{x-a}{1-a},\frac{y-a}{1-a}\right)$$

$W(x,y) = V(x,y)$ en $[a,1]^2$.

Por último, como: $(x,y) \in \Re_a \iff (N(x),N(y)) \in \Re_a$, tenemos que:

$$\forall (x,y) \in \Re_a : W(x,y) = N\big(V(N(x),N(y))\big) = N(a) = a$$

Luego, V es auto-dual respecto de la negación fuerte N.

E) Continuidad de las n-normas

La continuidad de una n-norma V está íntimamente ligada a la continuidad de T_V y S_V. En efecto veamos el siguiente resultado.

Teorema 3.5

Sean: T una t-norma continua en I^2, S una s-norma continua en I^2, y $a \in (0,1)$. Entonces: $V_{T,S,a}$ es una n-norma continua en I^2. Recíprocamente, si V es una n-norma continua en I^2, entonces: T_V y S_V, son continuas en I^2.

Demostración:

La continuidad de $V = V_{T,S,a}$ en: $[0,a]^2$, $[a,1]^2$ y $\Re_a$, viene de la continuidad de T y S, y porque $V_{T,S,a}(x,y) = a$ en $\Re_a$. Falta estudiar la continuidad en: $([0,1] \times \{a\}) \cup (\{a\} \times [0,1])$.

Sea: $P_1 = (x,a) \in [0,a] \times \{a\}$, entonces: $V(x,a) = a$ y $S\left(\frac{u}{a},\frac{v}{a}\right) \longrightarrow S\left(\frac{x}{a},1\right) = 1$

Cuando $(u,v) \in [0,a]^2$ y $(u,v) \longrightarrow (x,a)$ tenemos que:

Dado: $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que: $|u-x| < \delta$ y $|v-a| < \delta \implies \left|S\left(\frac{u}{a},\frac{v}{a}\right) - 1\right| < \frac{\varepsilon}{a}$.

Entonces:

$$|u-x| < \delta \text{ y } |v-a| < \delta \implies |V(u,v) - a| = \left|aS\left(\frac{u}{a},\frac{v}{a}\right) - a.1\right| < \varepsilon.$$

Luego V es continua en $[0,a] \times \{a\}$.

Similarmente se prueba la continuidad de V en $[a,1] \times \{a\}$ y en $\{a\} \times [0,1]$.

El recíproco viene fácilmente de (2.1) y (2.2).

Teorema 3.6

Sean: T una t-norma y S una s-norma, ambas continuas en I^2. Sea $\langle a_n \rangle$ una sucesión en $(0,1)$ tal que $a_n \uparrow (\downarrow)\ a \in (0,1)$. Entonces existe

$$\lim_{n\to\infty} V_{T,S,a_n}(x,y) = V(x,y) \quad \text{y} \quad V(x,y) = V_{T,S,a}\ ; \quad \forall (x,y) \in I^2.$$

Luego V es una n-norma de elemento absorbente a.

Demostración:

Haremos la prueba en el caso $(\uparrow)$.

Sea $(x,y) \in [0,a]^2$. Supongamos primero que: $(x,y) \in [0,a)^2$. Luego existe $m \in N$ tal que: $(x,y) \in [0,a_n]^2 \quad \forall n \geq m$. Por lo tanto, tenemos:

$$V_{T,S,a_n}(x,y) = a_n S\left(\frac{x}{a_n}, \frac{y}{a_n}\right) \to aS\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) = V_{T,S,a}(x,y)$$

Si: $x = a$ e $0 \leq y < a$, entonces: $a \in [a_n, 1] \quad \forall n \in N$ y existe $m \in N$ tal que: $y \in [0, a_n]$ $\forall n \geq m$. Luego: $(a,y) \in [a_n, 1] \times [0, a_n] = \Re_{a_n} \quad \forall n \geq m$. Por lo tanto:

$$V_{T,S,a_n}(a,y) = a_n \to a = V_{T,S,a}(a,y)$$

Similarmente si: $0 \leq x < a$ e $y = a$, entonces: $V_{T,S,a_n}(x,a) = a_n \to a = V_{T,S,a}(x,a)$

Ahora, si $x = a$ e $y = a$, entonces: $(a,a) \in [a_n, 1]^2 \quad \forall n \in N$. Luego:

$$V_{T,S,a_n}(a,a) = a_n + (1 - a_n)T\left(\frac{a - a_n}{1 - a_n}, \frac{a - a_n}{1 - a_n}\right) \to a = V_{T,S,a}(a,a)$$

Sea $(x,y) \in [a,1]^2$, entonces: $(x,y) \in [a_n, 1]^2 \quad \forall n \in N$, luego:

$$V_{T,S,a_n}(x,y) = a_n + (1 - a_n)T\left(\frac{x - a_n}{1 - a_n}, \frac{y - a_n}{1 - a_n}\right) \to a + (1 - a)T\left(\frac{x - a}{1 - a}, \frac{y - a}{1 - a}\right) = V_{T,S,a}(x,y)$$
$$= V_{T,S,a}(x,y).$$

Similarmente, en $([0,a) \times (a,1]) \cup ((a,1] \times [0,a))$ se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} V_{T,S,a_n}(x,y) = V_{T,S,a}(x,y).$$

F) N-normas idempotentes y otras propiedades algebraicas

Definición 3.3

Una n-norma V es **idempotente** si $V(x,x) = x \quad \forall x \in I$.

En lo que sigue veremos que existe una única n-norma idempotente que es la n-norma $V_{min,max,a}$ (Vea la fig. 7), tal como se indica en [5,p.228].

Teorema 3.7

V es una n-norma idempotente con elemento absorbente $a \in (0,1)$ si y solo si:

$$V = V_{min,max,a}$$

Demostración:

Recordemos que:

$$V_{min,max,a}(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} & (x,y) \in [0,a]^2 \\ \min\{x,y\} & (x,y) \in [a,1]^2 \\ a & (x,y) \in \Re_a \end{cases} \quad (3.3)$$

Si V es una n-norma idempotente, entonces T_V y S_V son idempotentes en I^2, y por lo tanto:

$$T_V(x,y) = \min\{x,y\}, \text{ y } S_V(x,y) = \max\{x,y\}$$

Luego V viene dado por (3.3).

El recíproco es trivial.

Corolario

Si V es n-norma idempotente de elemento absorbente $a \in (0,1)$, entonces V es auto-dual con respecto a cualquier negación fuerte N con punto fijo a.

Demostración:

Por el teorema 3.7, V tiene la forma (3.3), la cual es autodual, como puede probarse fácilmente. Por otra parte es claro que existen negaciones fuertes con un punto fijo dado: $a \in (0,1)$. Por ejemplo: la negación fuerte de Sugeno de parámetro: $\beta = \dfrac{1-2a}{a^2}$.

Otro ejemplo es el siguiente: sea $a \in (0,1)$, y definimos la función:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2a} & x \in [0,a] \\ \dfrac{x+1-2a}{2(1-a)} & x \in [a,1] \end{cases}$$

Como g es continua, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ y es estrictamente creciente, la función: $N(x) = g^{-1}\big(g(1) - g(x)\big)$ es una negación fuerte, de acuerdo a [6, teorema 3.7, p.59]. Y $N(a) = a$. De manera que existe una negación fuerte con punto prefijado a.

Observaciones:

1) Existen n-normas auto-duales que no son idempotentes. En efecto siguiendo el teorema 3.4, podemos construir una n-norma auto-dual distinta de (3.3), por tanto, no idempotente, de acuerdo al teorema 3.7.

Por ejemplo si tomamos: $T_P(x,y) = xy$, y la negación fuerte de Sugeno con $\beta = 3$, o sea: $N(x) = \dfrac{1-x}{1+3x}$, la cual tiene como punto fijo: $a = \dfrac{1}{3}$ y por lo tanto $\bar{N} = \dfrac{1-x}{1+x}$.

Entonces aplicando la parte b) del teorema 3.4 para construir la s-norma S, resulta:

$$S = \frac{x+y}{1+xy}$$

Con las cuales definimos la n-norma:

$$V(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{1+9xy} & \text{si } (x,y) \in \left[0,\dfrac{1}{3}\right]^2 \\ \dfrac{1}{2}(3xy - x - y + 1) & \text{si } (x,y) \in \left[\dfrac{1}{3},1\right]^2 \\ \dfrac{1}{3} & \text{e. o. c} \end{cases}$$

La cual es auto-dual de acuerdo al teorema 3.4 y no es idempotente, pues por ejemplo:

$$V\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{15} \neq \frac{1}{6}.$$

2) Un elemento $b \in [0, a]$ es $V-$ idempotente sii $\frac{b}{a}$ es S_V- idempotente en I.

3) Un elemento $b \in [a, 1]$ es $V-$ idempotente sii $\frac{b-a}{1-a}$ es T_V- idempotente en *I*.

4) Es claro que una n-norma puede tener elementos idempotentes no triviales, y no ser idempotente. Así, en el ejemplo 2, literal B, de esta sección, todos los elementos de $[0, a]^2$ son idempotentes, pero si $a = 1/2$, y tomamos $x = 2/3$, entonces: $V\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{9}$.

Lema 3.1

Sea V una n-norma de elemento absorbente $a \in (0,1)$, entonces:

a) Si $(x, y) \in [0, a]^2$ entonces: $V(x, y) \in [0, a]$

b) Si $(x, y) \in [a, 1]^2$ entonces: $V(x, y) \in [a, 1]$

c) $\forall x \in [0, a]$ y $\forall n \in N$ se cumple que: $x_V^{(n)} \in [0, a]$

d) $\forall x \in [a, 1]$ y $\forall n \in N$ se cumple que: $x_V^{(n)} \in [a, 1]$

e) $\forall x \in [0, a]$ y $\forall n \in N$ se cumple que: $x_V^{(n)} = a\left(\frac{x}{a}\right)_{S_V}^{(n)}$

f) $\forall x \in [a, 1]$ y $\forall n \in N$ se cumple que: $x_V^{(n)} = a + (1-a)\left(\frac{x-a}{1-a}\right)_{T_V}^{(n)}$

g) El único elemento nilpotente de V es 0.

Demostración:

Los literales a) y b), son inmediatos. Asimismo, c), d), e) y f) se prueban usando inducción y los literales anteriores.

f) $\forall x \in (0, a]$, tenemos que: $x_V^{(2)} = a\left(\frac{x}{a}\right)_{S_V}^{(2)} \geq a.\frac{x}{a} = x > 0$. Por lo tanto: $x_V^{(n)} \geq x > 0$ $\forall n \in N$. Similarmente, $\forall x \in [a, 1]$, tenemos que:

$$x_V^{(n)} = a + (1-a)\left(\frac{x-a}{1-a}\right)_{T_V}^{(n)} \geq a > 0, \quad \forall n \in N$$

Definición 3.4

Una operación binaria A sobre $J = [c,d]$ es **arquimediana,** si: $\forall x \in [c,d)$ y $\forall y \in (c,d]$, existe $n \in N$ tal que: $x_A^{(n)} < y$.

Asimismo, A es **super-arquimediana,** si: $\forall x \in (c,d]$ y $\forall y \in [c,d)$, existe $n \in N$ tal que: $x_A^{(n)} > y$.

Teorema 3.8

Sea V una n-norma con elemento absorbente $a \in (0,1)$. Entonces:

a) V es arquimediana en $[a,1]$ sii T_V es arquimediana en I.

b) V es super-arquimediana en $[0,a]$ sii S_V es super-arquimediana en I.

Demostración:

a) Supongamos que V es arquimediana en $[a,1]$, y sea $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$. Luego: $(a+(1-a)x, a+(1-a)y) \in [a,1) \times (a,1]$, por lo tanto existe $n \in N$ tal que:

$$(a+(1-a)x)_V^{(n)} = a+(1-a)x_{T_V}^{(n)} < a+(1-a)y \quad \Longrightarrow \quad x_{T_V}^{(n)} < y$$

Luego: T_V es arquimediana en I.

Si T_V es arquimediana en I, para $(x,y) \in [a,1) \times (a,1]$, tenemos que: $\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right) \in [0,1) \times (0,1]$. Luego existe $n \in N$ tal que:

$$\left(\frac{x-a}{1-a}\right)_{T_V}^{(n)} = \frac{x_V^{(n)}-a}{1-a} < \frac{y-a}{1-a} \quad \Longrightarrow \quad x_V^{(n)} < y$$

O sea, V es arquimediana en $[a,1]^2$.

b) Usando e) del lema 3.1, y procediendo en forma parecida a la parte a) de este teorema, tenemos el resultado.

Lema 3.2

Sea S una s-norma continua en I^2, teniendo solamente elementos idempotentes triviales, entonces: S es super-arquimediana.

Demostración:

Sea T la t-norma dual, por la negación $N(x) = 1-x$. Entonces T es continua, y tampoco tiene elementos idempotentes no triviales, luego por la proposición 2.15(i) en [5, p.29], tenemos que T es arquimediana en I, luego su dual S es super-arquimediana.

Teorema 3.9

Sea V una n-norma con elemento absorbente $a \in (0,1)$, continua en I^2. Si V no tiene elementos idempotentes no triviales, entonces V es super-arquimediana en $[0,a]$ y arquimediana en $[a,1]$.

Demostración:

Si V es una n-norma continua en I^2, entonces por el teorema 3.5, T_V y S_V son continuas en I^2. Asimismo, de acuerdo a las observaciones 2) y 3) de esta sección, si V no tiene elementos idempotentes no triviales en I, entonces no los tienen T_V y S_V. Luego, por el lema 3.2, T_V es arquimediana y S_V es super-arquimediana en I. Finalmente, por el teorema 3.8, V es super-arquimediana en $[0,a]$ y arquimediana en $[a,1]$.

Teorema 3.10 (Generadores aditivos de V)

V es una n-norma de elemento absorbente $a \in (0,1)$, continua y sin elementos idempotentes no triviales, si y solo si, existen funciones: f y g de $[0,1]$ en $[0,\infty]$, continuas en I, siendo f estrictamente creciente y g estrictamente decreciente, con $f(0) = 0$ y $g(1) = 0$, tales que:

$$V(x,y) = \begin{cases} af^{(-1)}\left(f\left(\frac{x}{a}\right) + f\left(\frac{y}{a}\right)\right) & (x,y) \in [0,a]^2 \\ a+(1-a)g^{(-1)}\left(g\left(\frac{x-a}{1-a}\right) + g\left(\frac{y-a}{1-a}\right)\right) & (x,y) \in [a,1]^2 \\ a & e.o.c \end{cases} \tag{3.4}$$

Demostración:

De acuerdo con el teorema 3.9, T_V es arquimediana en I, y S_V es super-arquimediana en I. Luego de acuerdo a las proposiciones 3.11 y 3.16 en [6, p.68 y p.78], existe una función g de $[0,1]$ en $[0,\infty]$, continua y estrictamente decreciente, con $g(1)=0$ y tal que:

$$T_V(x,y) = g^{(-1)}\big(g(x)+g(y)\big) \quad \forall (x,y) \in I^2$$

Luego, en $[a,1]^2$, tenemos:

$$V(x,y) = a + (1-a)\, g^{(-1)}\left(g\left(\frac{x-a}{1-a}\right) + g\left(\frac{y-a}{1-a}\right)\right)$$

Asimismo, existe una función f de $[0,1]$ en $[0,\infty]$, continua, estrictamente creciente, con $f(0)=0$ y tal que:

$$S_V(x,y) = f^{(-1)}\big(f(x)+f(y)\big) \quad \forall (x,y) \in I^2$$

Luego, en $[0,a]^2$, tenemos:

$$V(x,y) = a f^{(-1)}\left(f\left(\frac{x}{a}\right) + f\left(\frac{y}{a}\right)\right)$$

Por lo tanto, se cumple (3.4), pues por b), en la sección 2, tenemos que: $V(x,y) = a$ en $\Re_a$.

Ahora, sean f y g, funciones de $[0,1]$ en $[0,\infty]$, continuas en I, con f estrictamente creciente, g estrictamente decreciente, $f(0)=0$, $g(1)=0$ y cumpliendo (3.4).

Luego: $T(x,y) = g^{(-1)}\big(g(x)+g(y)\big)$ es una t-norma continua, arquimediana sin elementos idempotentes no triviales. Asimismo: $S(x,y) = f^{(-1)}\big(f(x)+f(y)\big)$ es una s-norma, continua, super-arquimediana, también sin elementos idempotentes no triviales. Luego, por el teorema 3.1, V definido por (3.4) es una n-norma continua, con elemento absorbente a, sin elementos idempotentes no triviales.

Agradecimiento

Agradezco a la Profesora Nora Scoppetta (UNEXPO), su colaboración en el dibujo de las gráficas del presente trabajo.

Referencias bibliográficas

1. Alsina,C.,et al. Associative Functions, World Scientific Publishing Co, New Jersey (2006)
2. Beliakov, G., et al. Aggregation Functions, Springer-Verlag, Berlín (2007)
3. Calvo, T., et al. The Functional Equations of Frank and Alsina for Uninorms and Nullnorms, Fuzzy Sets and Systems,120: 385-394 (2001)
4. Drygás, P. A Characterization of idempotent nullnorms, Fuzzy Sets andSystems, 145: 455-461 (2004).
5. Klement, E.P., et al. Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, London (2000).
6. Klir, G.J. and Yuan, B. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice Hall, New Jersey (1995).
7. Mas, M., et al. T-Operators. Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems, 7: 31-50 (1999).

8. Mas, M., et al. The Modularity Condition for Uninorms and t-Operators, Fuzzy Sets Syst, 126: 207-218(2002).
9. Mas,M., et al. Construction of RET Operators from Aggregation Functions, International J. of Intelligent Syst, 21(2): 155-171 (2006).
10. Rudas,I. New Approach to Information Aggregation, Artificial Intelligent. 12: 163-176 (2011).
11. Sarabia, J. Algunos Resultados sobre t-Normas. Rev. Científica, UNET (Proceso de arbitraje).
12. Sarabia, J. Algunas Propiedades de Uninormas, Rev. Acad. Canar. Ciencias 1-2: 51-69 (2010).